

Corso di aggiornamento  
Norme Tecniche per le Costruzioni 2008

**Progetto e verifica di elementi strutturali in c.a.**

4 - Flessione composta

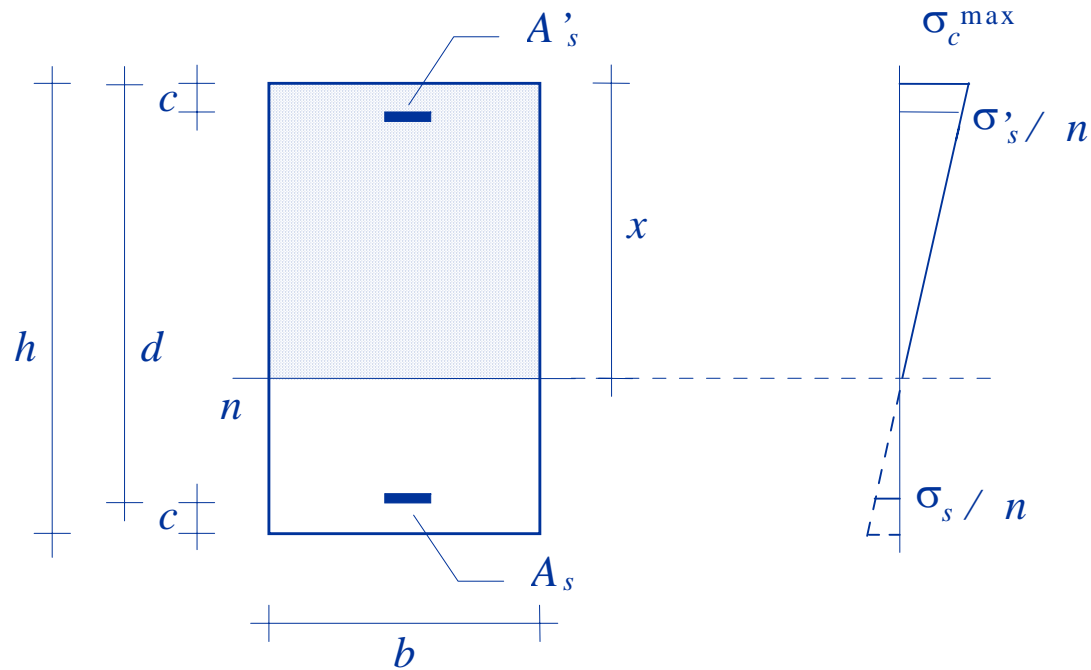
Bologna

3-4 maggio 2012

Edoardo M. Marino

# Verifica di sezioni soggette a flessione composta

# Verifica - tensioni ammissibili



Dati:

Geometria della sezione  
Armature

Coppia M-N

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Tensioni massime

# Verifica - tensioni ammissibili

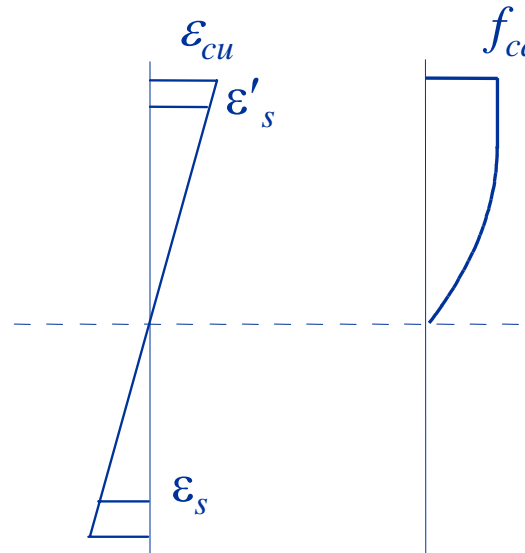
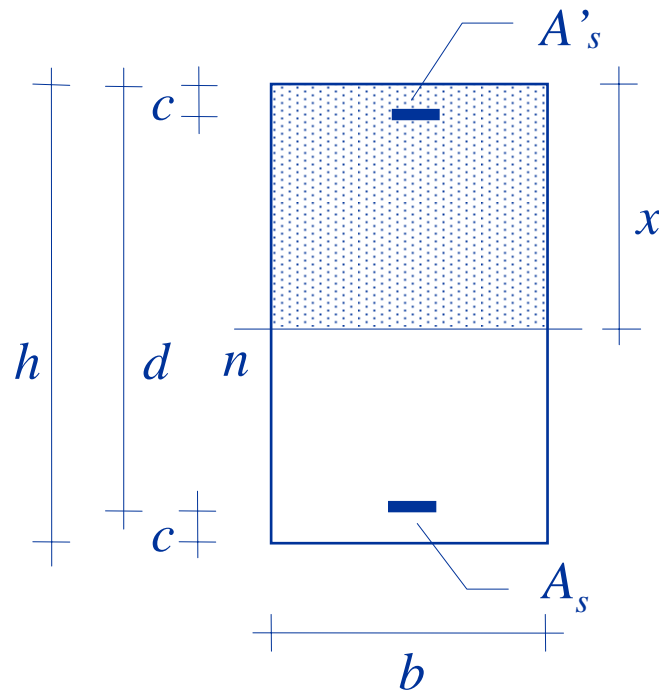
Il procedimento è abbastanza lungo e complesso, perché occorre:

Controllare se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo d'inerzia

- delle sole armature (se  $N$  è di trazione)
- di armature omogeneizzate e calcestruzzo (se  $N$  è di compressione)

Imporre la condizione  $I_n = e_n S_n$  se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo  
(equazione di terzo grado, per sezione rettangolare)

# Verifica - stato limite ultimo



Dati:

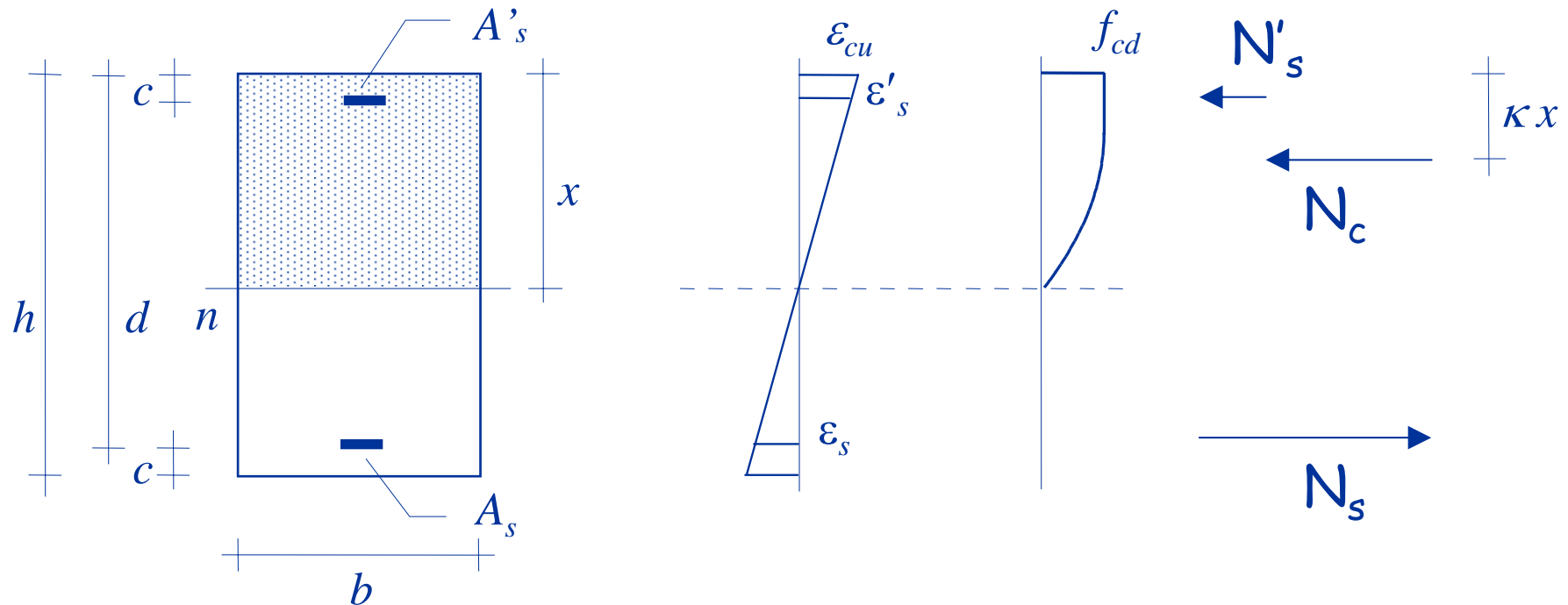
Geometria della sezione  
Armature

Coppia  $M_{Ed}-N_{Ed}$

Incognite:

Posizione dell'asse neutro  
Momento resistente  $M_{Rd}$   
corrispondente a  $N_{Ed}$

# Verifica - stato limite ultimo



Per trovare l'asse neutro:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

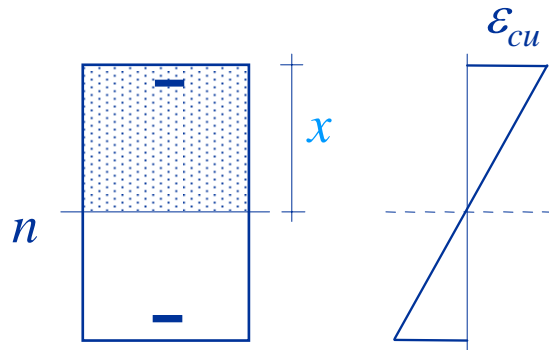
(equilibrio alla traslazione)

E poi calcolare  $M_{Rd}$ , con equilibrio alla rotazione

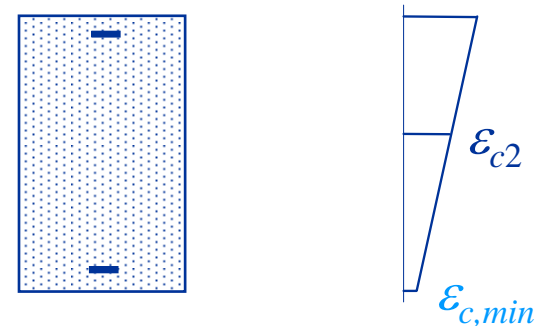
# Verifica - stato limite ultimo

Con riferimento ai diagrammi di deformazioni, avendo posto un limite solo alla deformazione del calcestruzzo vi sono solo due possibilità:

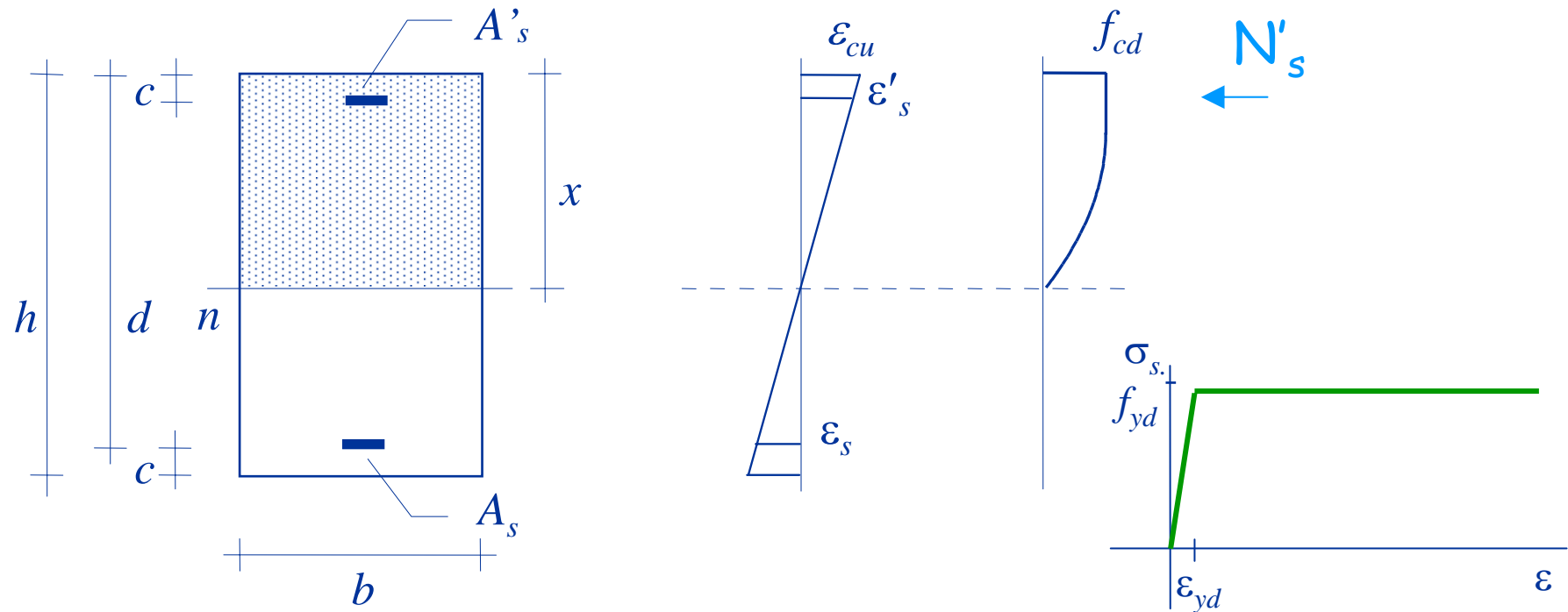
Sezione parzializzata



Sezione tutta compressa



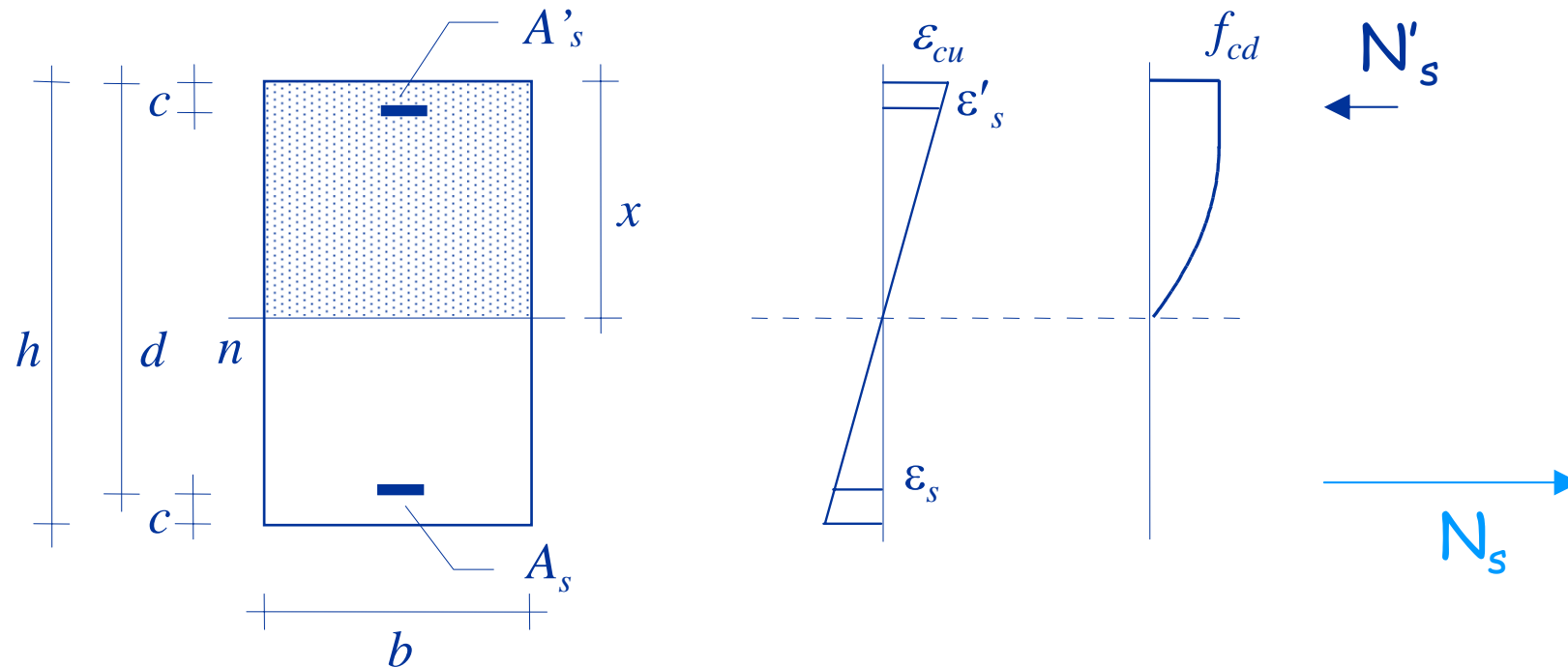
# Risultante delle tensioni, armatura compressa (sezione parzializzata)



$$\epsilon'_s = \frac{x - c}{x} \epsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon'_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s$$

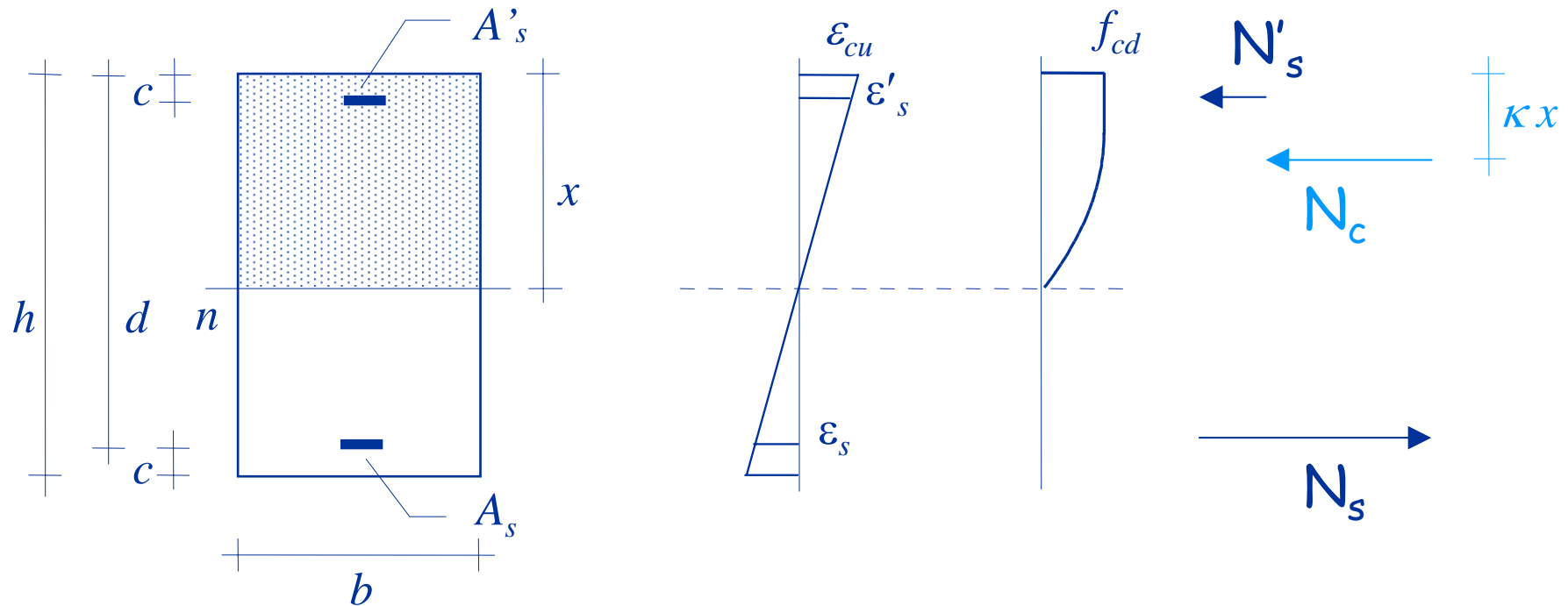


# Risultante delle tensioni, armatura tesa (sezione parzializzata)



$$\epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s$$

# Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione parzializzata)



$$N_c = \beta \ b \times f_{cd}$$

per sezione rettangolare,  $\beta = 0.810$

# Verifica - stato limite ultimo

La risoluzione presenta difficoltà analoghe a quelle viste per la flessione semplice

Per sezione rettangolare, parzializzata e con armature snervate, si ottiene un'equazione di primo grado che ha come soluzione

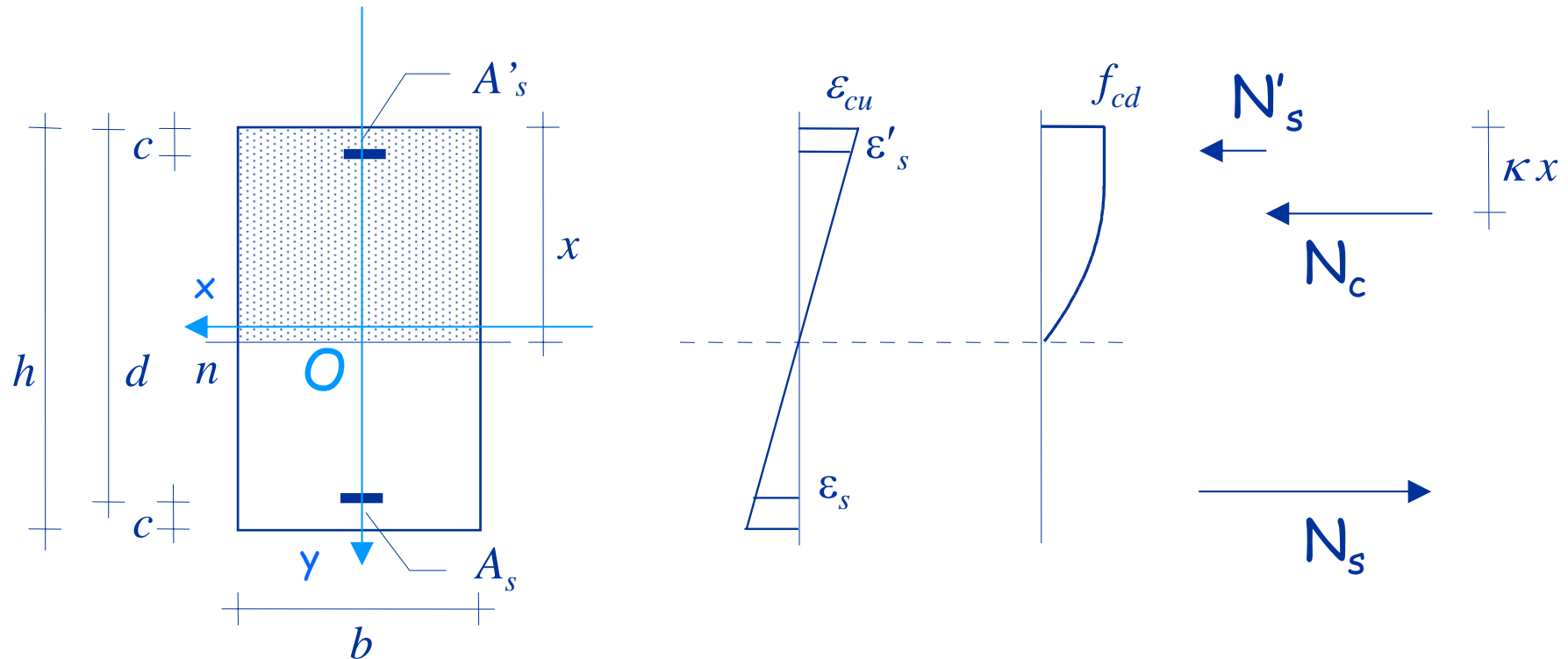
$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}}$$

$N_{Ed}$  positivo se trazione

altrimenti si può risolvere per tentativi l'equazione:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed}$$

## Momento resistente



Si determina imponendo  
l'equilibrio alla rotazione  
(rispetto al baricentro della  
sezione)

$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa x)$$

per sezione rettangolare,  $\kappa = 0.416$

# Esempio 1

## sezione rettangolare tensoinflessa

sezione 30x60

$c = 5 \text{ cm}$

$A_{s,\text{sup}} = 6 \text{ cm}^2$

$N_{Ed} = 200 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 150 \text{ kNm}$

$A_{s,\text{inf}} = 10 \text{ cm}^2$



Poiché  $N$  è di trazione la sezione è parzializzata

Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = -1.26 \text{ cm}$$

ma questo valore non è accettabile (è negativo)

Procedendo per tentativi si trova  $x = 5.16 \text{ cm}$

$N_c = -177.7 \text{ kN}$

$N'_s = -13.6 \text{ kN}$

$N_s = 391.3 \text{ kN}$

$M_{Rd} = 150.7 \text{ kNm}$

la sezione è verificata

## Esempio 2

### sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$c = 5 \text{ cm}$

$A_{s,\text{sup}} = 6 \text{ cm}^2$

$N_{Ed} = -1000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 150 \text{ kNm}$

$A_{s,\text{inf}} = 10 \text{ cm}^2$



Poiché  $N$  è di compressione occorre controllare se la sezione è parzializzata

Se  $x = 60 \text{ cm}$  si ha

$N_c = -2065.5 \text{ kN}$

$N'_s = -234.8 \text{ kN}$

$N_s = -60.1 \text{ kN}$

$N = -2360.4 \text{ kN}$

Poiché  $N_{Ed}$  è minore (in valore assoluto) di tale valore la sezione è parzializzata

## Esempio 2

### sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$c = 5 \text{ cm}$

$A_{s,\text{sup}} = 6 \text{ cm}^2$

$N_{Ed} = -1000 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 150 \text{ kNm}$

$A_{s,\text{inf}} = 10 \text{ cm}^2$



La sezione è parzializzata

Se entrambe le armature fossero snervate sarebbe

$$x = \frac{(A_s - A'_s) f_{yd} - N_{Ed}}{\beta b f_{cd}} = 33.60 \text{ cm}$$

Per tale valore le armature sono in effetti entrambe snervate

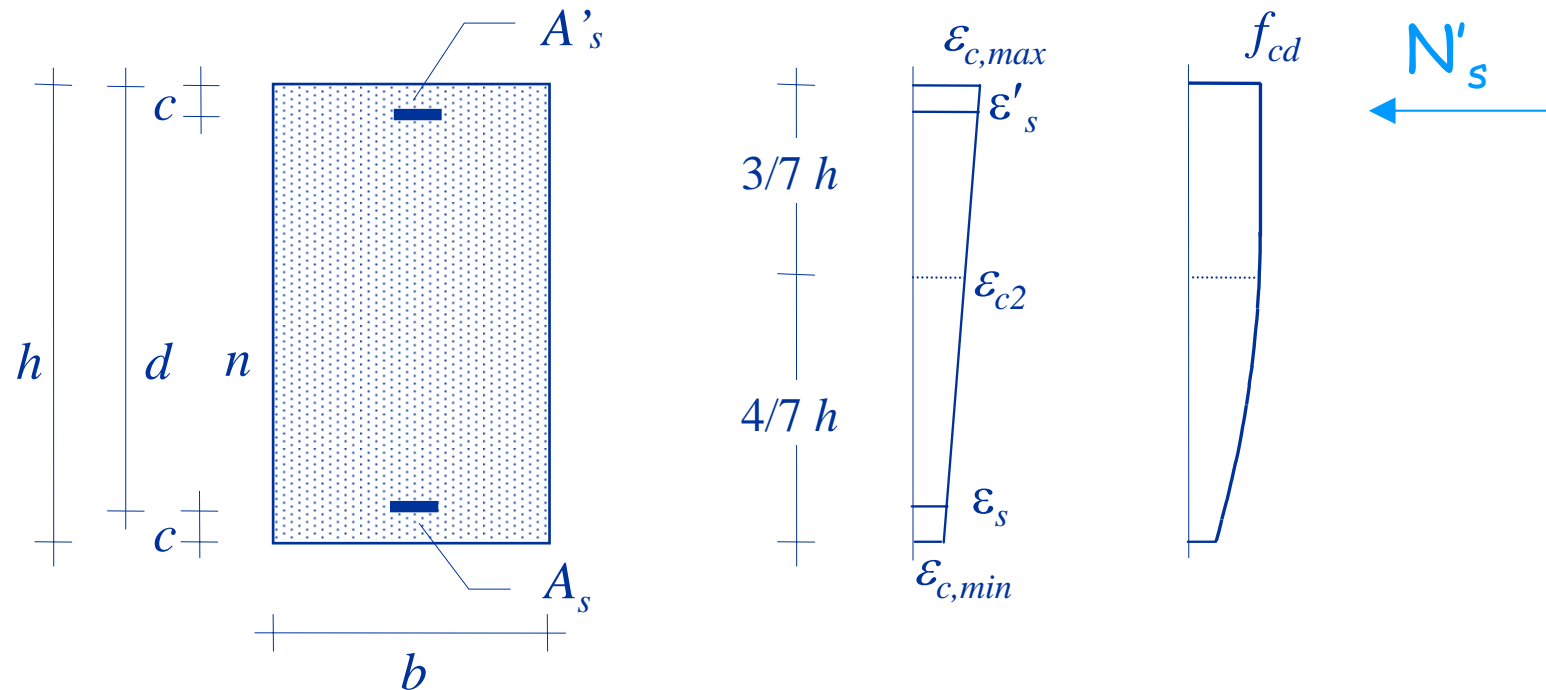
Si ha quindi  $x = 33.60 \text{ cm}$

$N_c = -1156.5 \text{ kN}$        $N'_s = -234.8 \text{ kN}$        $N_s = 391.3 \text{ kN}$

$M_{Rd} = 348.1 \text{ kNm}$

la sezione è verificata

# Risultante delle tensioni, armatura superiore (sezione tutta compressa)

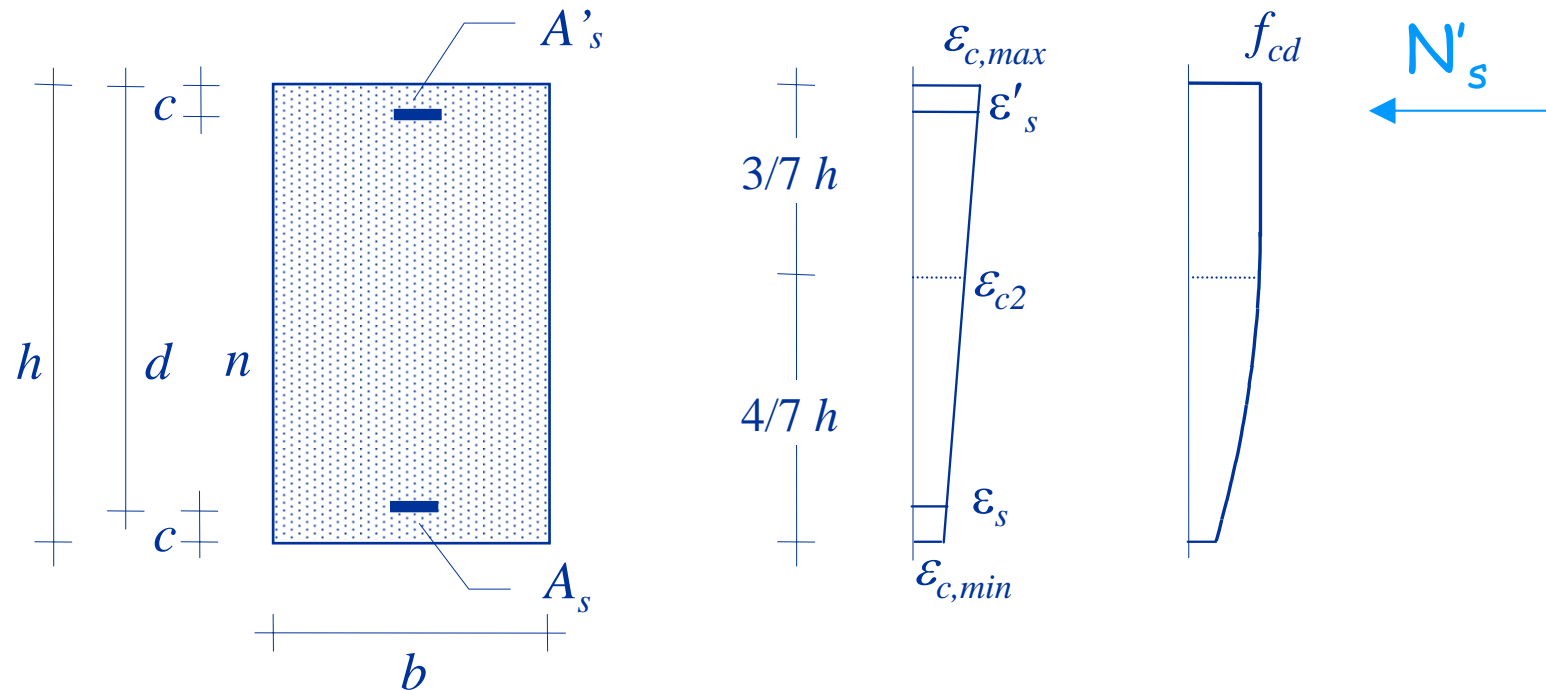


$$\epsilon'_s = \epsilon_{c2} \left[ \frac{d}{4/7 h} (1 - \eta_{\min}) + \eta_{\min} \right]$$

$$\text{dove } \eta_{\min} = \frac{\epsilon_{c,\min}}{\epsilon_{c2}}$$

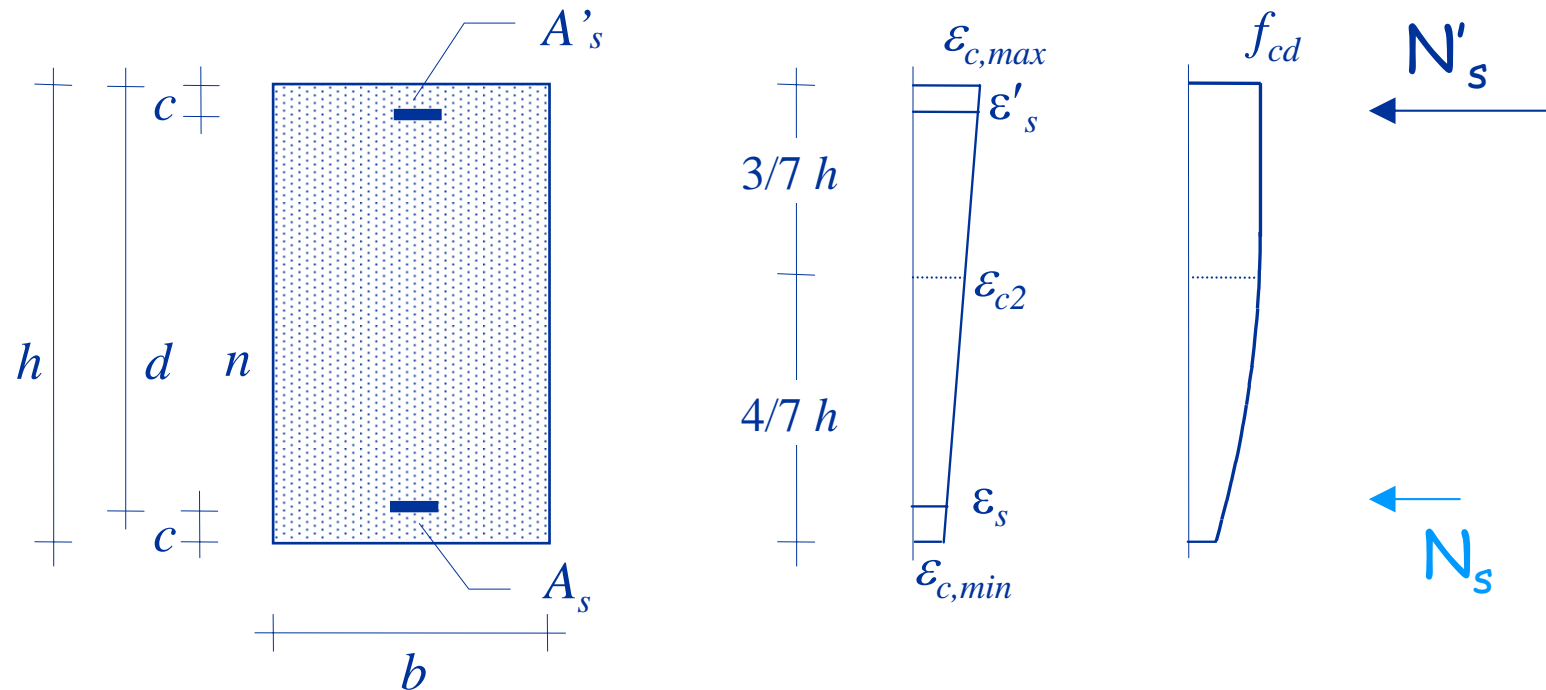


# Risultante delle tensioni, armatura superiore (sezione tutta compressa)



$$\begin{aligned}
 \text{noto } \varepsilon'_s &\Rightarrow \begin{cases} \text{se } \varepsilon'_s < \varepsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{yd}} f_{yd} \\ \text{se } \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd} & \Rightarrow \sigma'_s = f_{yd} \end{cases} \Rightarrow N'_s = A'_s \sigma'_s
 \end{aligned}$$

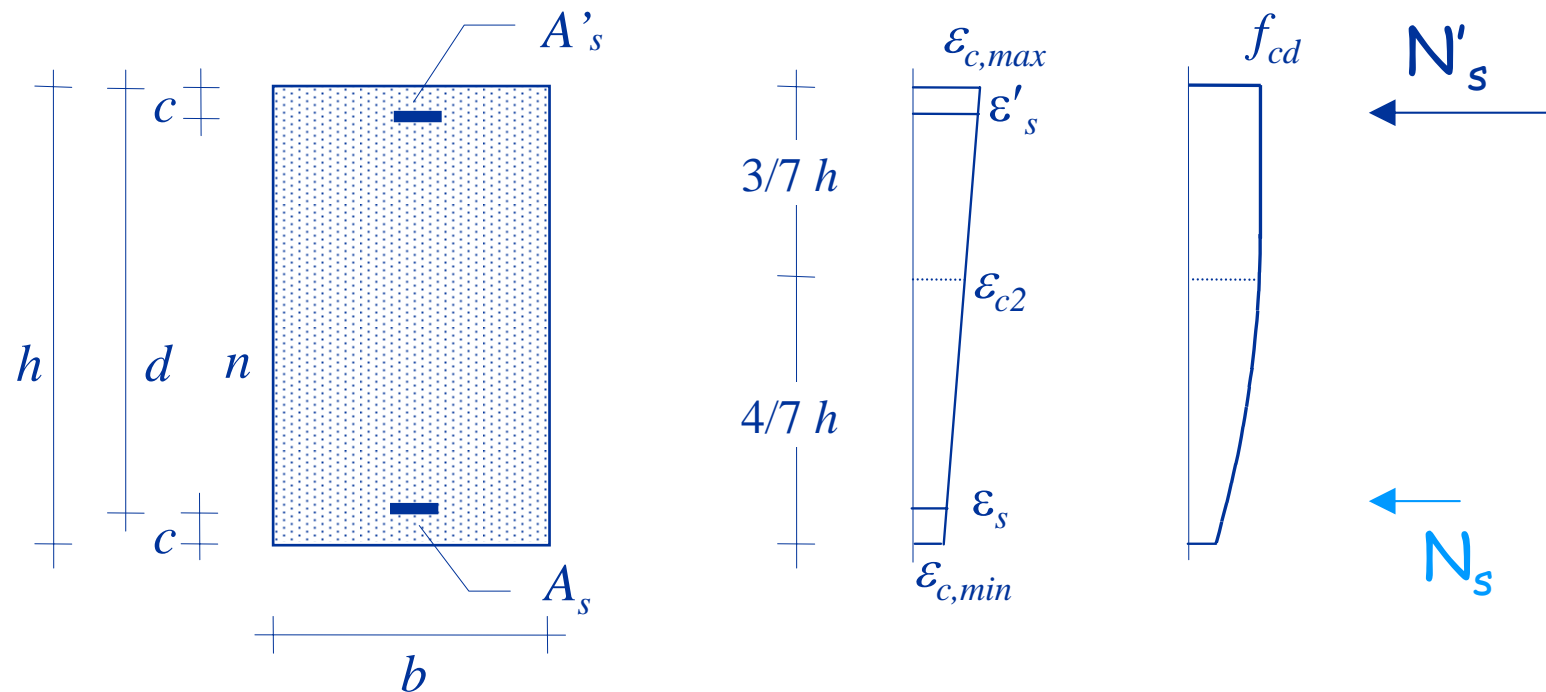
# Risultante delle tensioni, armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\epsilon_s = \epsilon_{c2} \left[ \frac{c}{4/7 h} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right]$$

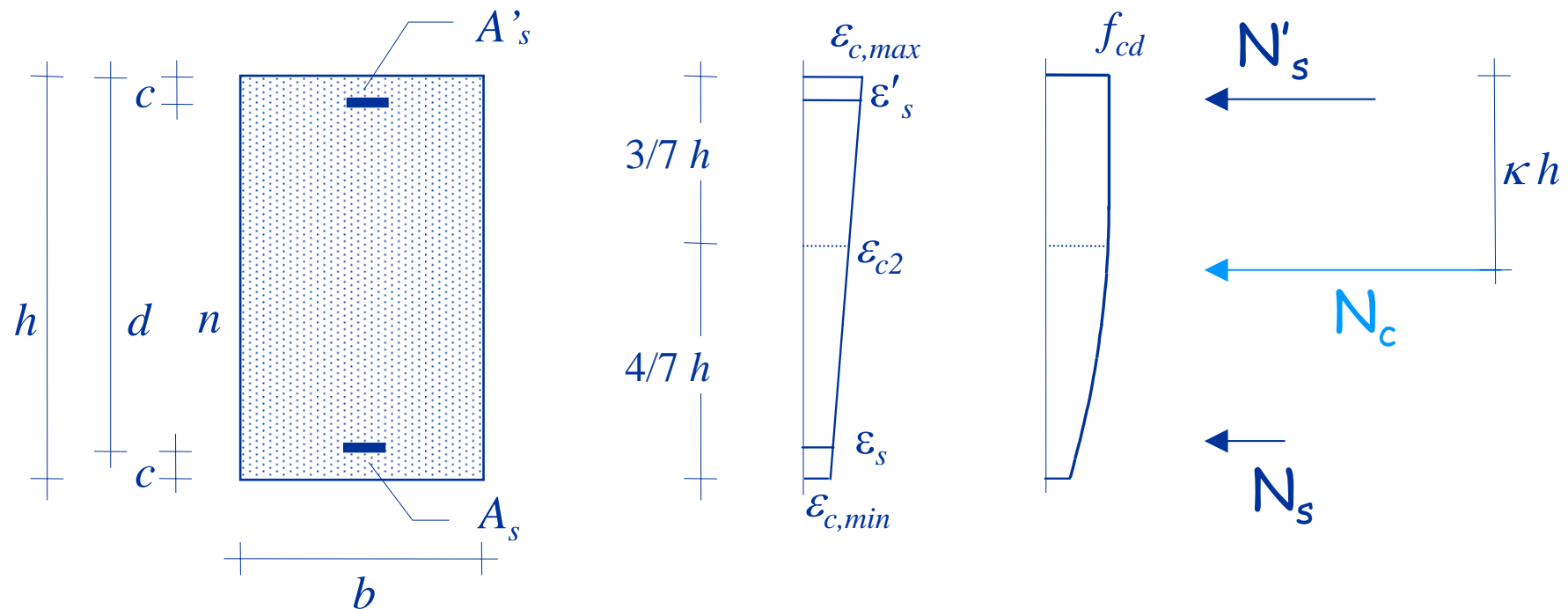
dove  $\eta_{min} = \frac{\epsilon_{c,min}}{\epsilon_{c2}}$

# Risultante delle tensioni, armatura inferiore (sezione tutta compressa)



$$\begin{aligned} \text{noto } \epsilon_s &\Rightarrow \begin{aligned} &\text{se } \epsilon_s < \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{yd}} f_{yd} \\ &\text{se } \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \Rightarrow \sigma_s = f_{yd} \end{aligned} \Rightarrow N_s = A_s \sigma_s \end{aligned}$$

# Risultante delle tensioni nel calcestruzzo (sezione tutta compressa)



$$N_c = \beta \ b \ h \ f_{cd}$$

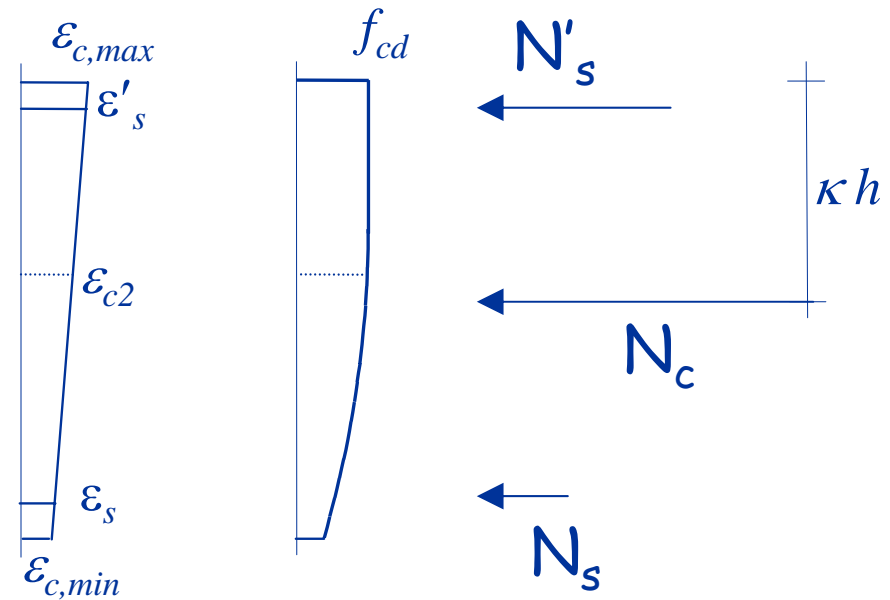
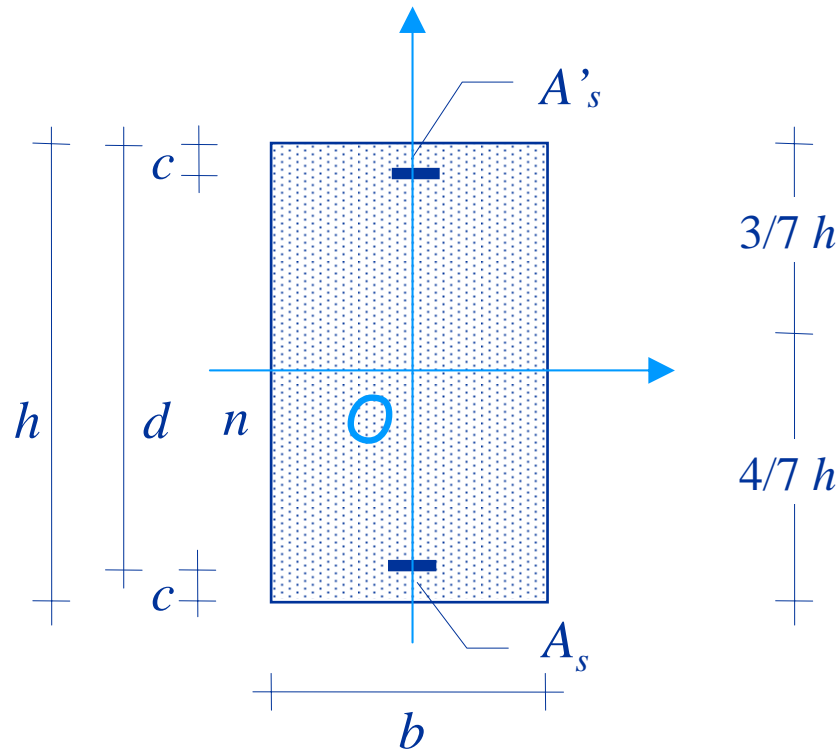
In questo caso  $\beta$  dipende da  $\eta_{min}$

per sezione rettangolare: 
$$\beta = 1 - \frac{4}{21} (1 - \eta_{min})$$

## Valori di $\beta$ per sezione rettangolare

$\eta_{\min}$	$\beta$
0.0	0.810
0.1	0.846
0.2	0.878
0.3	0.907
0.4	0.931
0.5	0.952
0.6	0.970
0.7	0.983
0.8	0.992
0.9	0.998
1.0	1.000

# Momento resistente



$$M_{Rd} = (N_s - N'_s) (h/2 - c) - N_c (h/2 - \kappa h)$$

per sezione rettangolare:

$$\kappa = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 16/49 (1 - \eta_{\min})^2}{1 - 4/21 (1 - \eta_{\min})^2}$$

Si determina imponendo l'equilibrio alla rotazione (rispetto al baricentro della sezione)

## Valori di $\beta$ e $\kappa$ per sezione rettangolare

$\eta_{\min}$	$\beta$	$\kappa$
0.0	0.810	0.416
0.1	0.846	0.435
0.2	0.878	0.450
0.3	0.907	0.463
0.4	0.931	0.474
0.5	0.952	0.482
0.6	0.970	0.489
0.7	0.983	0.494
0.8	0.992	0.497
0.9	0.998	0.499
1.0	1.000	0.500

## Esempio 3

### sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$c = 5 \text{ cm}$

$A_{s,\text{sup}} = 6 \text{ cm}^2$

$N_{Ed} = -2600 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 150 \text{ kNm}$

$A_{s,\text{inf}} = 10 \text{ cm}^2$



Poiché  $N$  è di compressione occorre controllare se la sezione è parzializzata

Se  $x = 60 \text{ cm}$  si ha

$N_c = -2066 \text{ kN}$

$N'_s = -234.8 \text{ kN}$

$N_s = -49.0 \text{ kN}$

$N = -2349.8 \text{ kN}$

Poiché  $N_{Ed}$  è maggiore (in valore assoluto) di tale valore la sezione è tutta compressa



## Esempio 3

### sezione rettangolare pressoinflessa

sezione 30x60

$c = 5 \text{ cm}$

$A_{s,\text{sup}} = 6 \text{ cm}^2$

$N_{Ed} = -2600 \text{ kN}$

$M_{Ed} = 150 \text{ kNm}$

$A_{s,\text{inf}} = 10 \text{ cm}^2$



La sezione è tutta compressa

Procedendo per tentativi si trova  $\eta_{\min} = 0.1961$

$N_c = -2236.1 \text{ kN}$

$N'_s = -234.8 \text{ kN}$

$N_s = -129.1 \text{ kN}$

$M_{Rd} = 93.7 \text{ kNm}$

la sezione NON è verificata

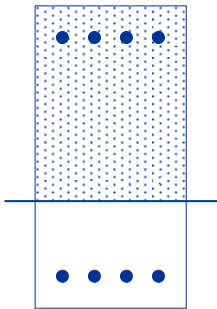
Domini  $M-N$   
per flessione composta retta

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

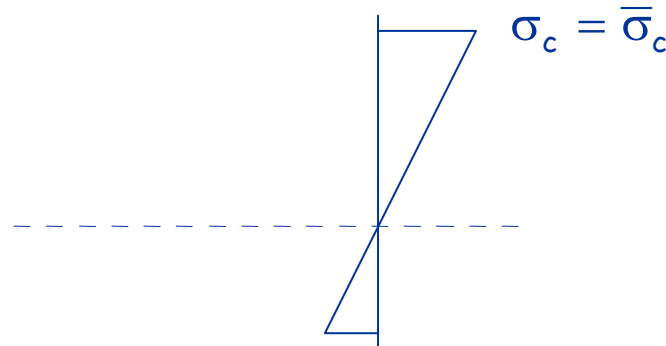
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un  
diagramma



si calcolano  
M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

$$M = \int \sigma y dA$$

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano  
M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

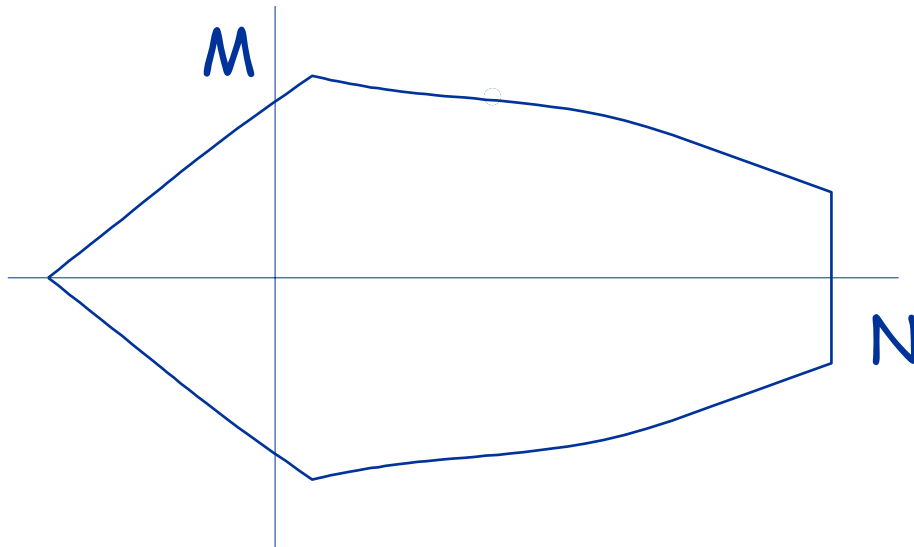
$$M = \int \sigma y dA$$

e si riporta la coppia  
M - N nel diagramma

# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\sigma_{\max}$  è uguale a  $\bar{\sigma}$

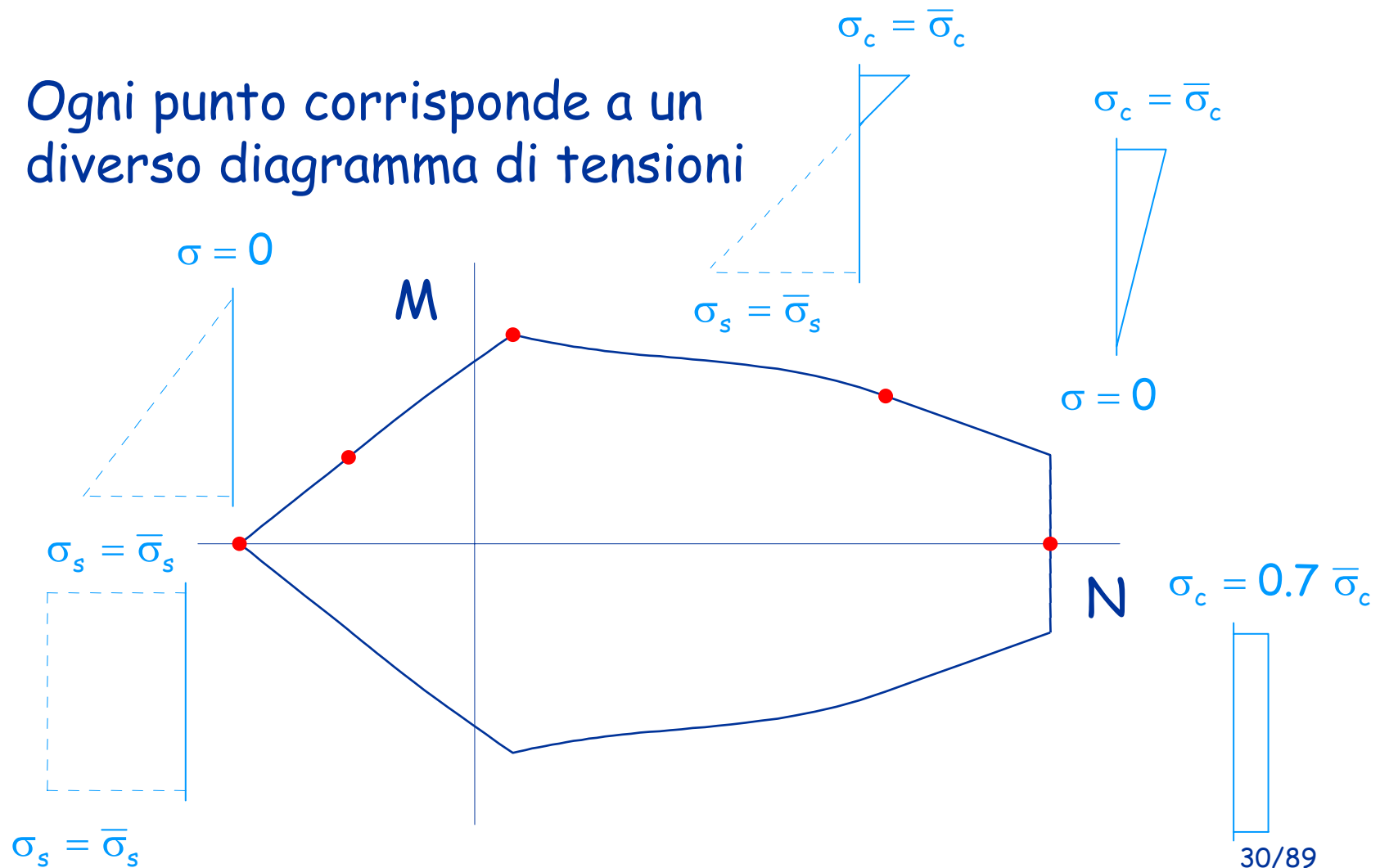
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



si ottiene il  
dominio  
completo

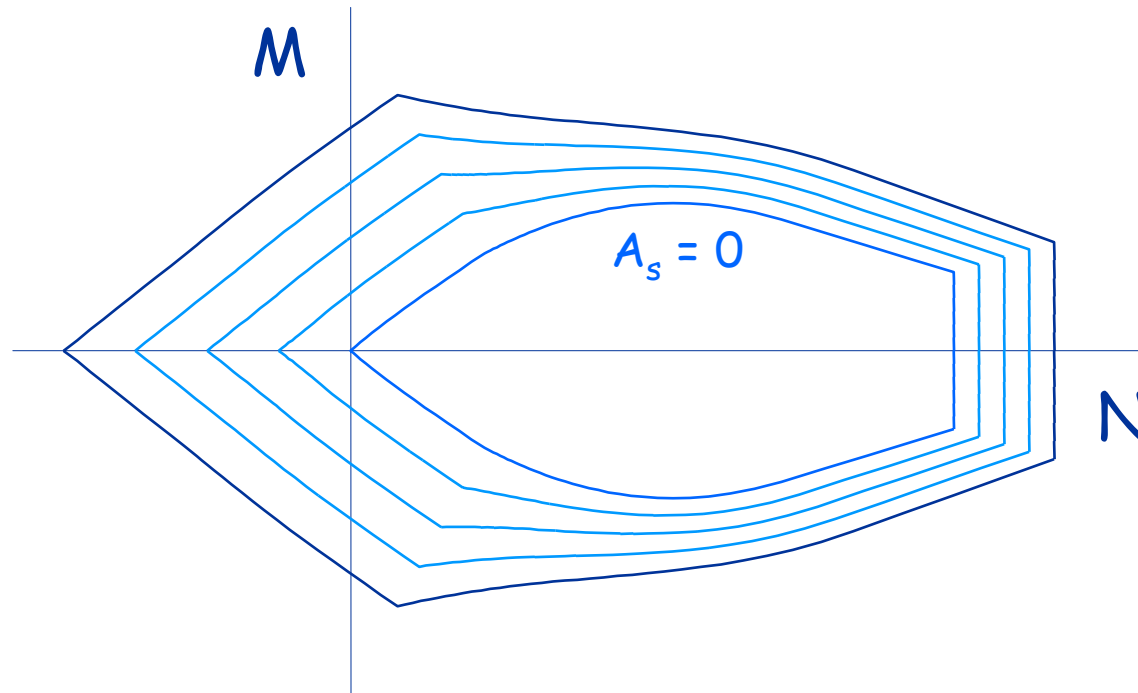
# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di tensioni



# Domini di resistenza - tensioni ammissibili

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

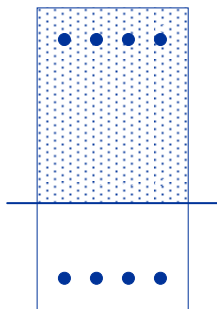


# Domini di resistenza - stato limite ultimo

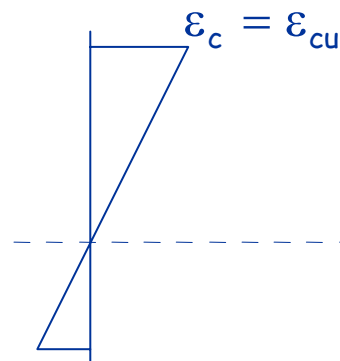
Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\varepsilon_{cu}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio

sezione



si assegna un diagramma di  $\varepsilon$



di  $\sigma$

$\sigma_c = f_{cd}$



si calcolano M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

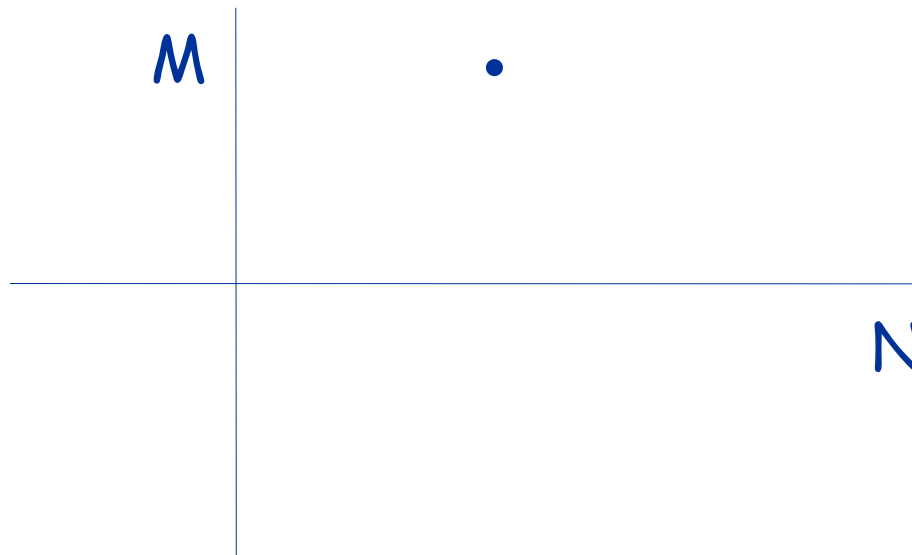
$$M = \int \sigma y dA$$



# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\varepsilon_{cu}$

Per ricavare una coppia M-N del dominio



si calcolano  
M ed N

$$N = \int \sigma dA$$

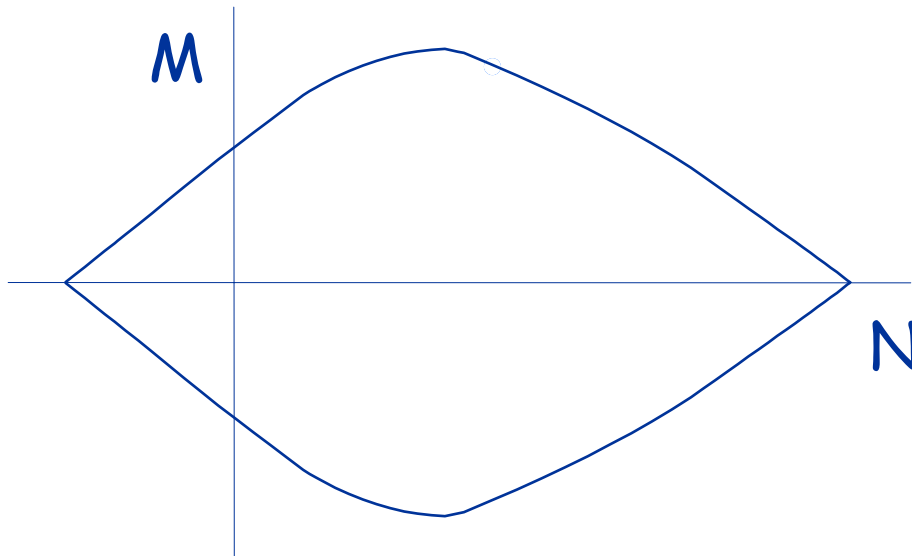
$$M = \int \sigma y dA$$

e si riporta la coppia  
M - N nel diagramma

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Dominio di resistenza, o curva di interazione = insieme delle coppie M-N per cui  $\varepsilon_{\max}$  è uguale a  $\varepsilon_{cu}$

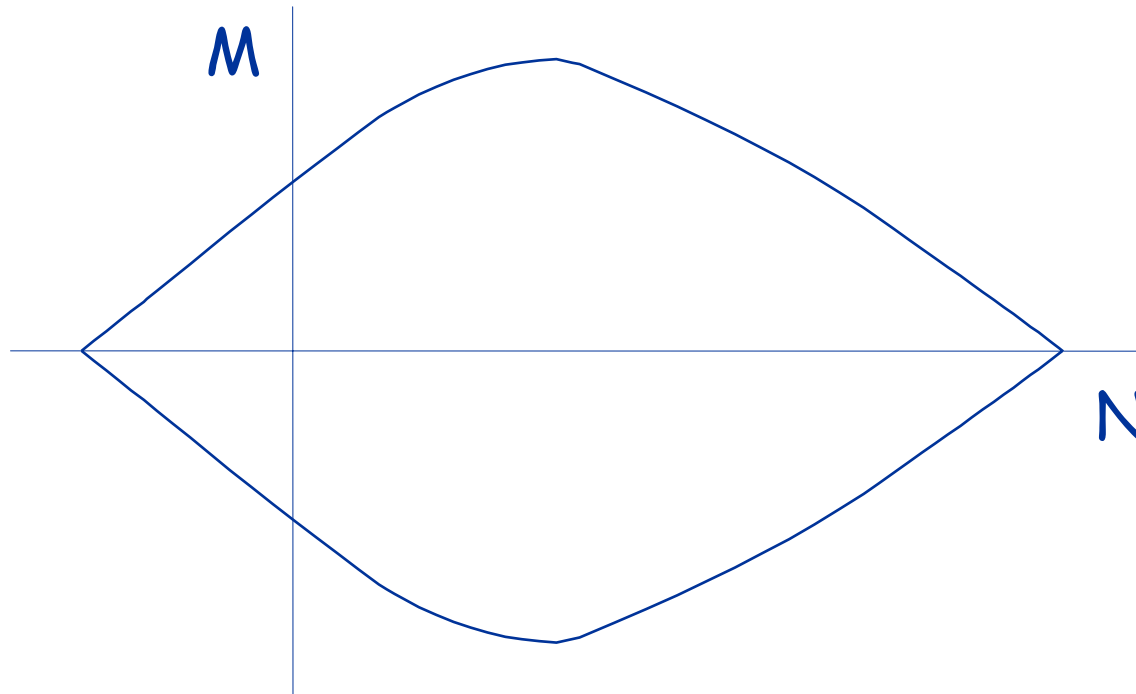
Ripetendo con tutti i possibili diagrammi ...



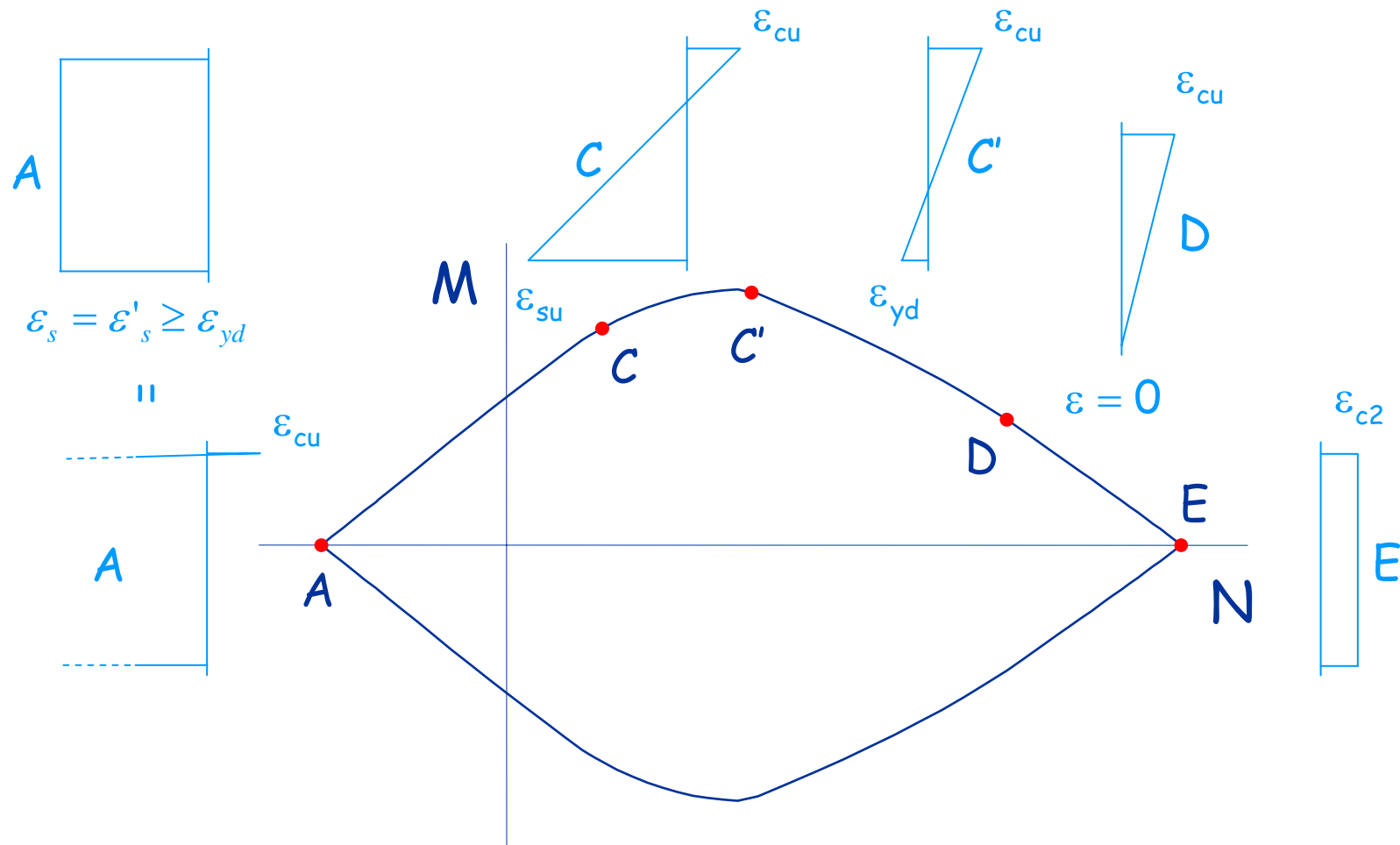
si ottiene il  
dominio  
completo

# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Ogni punto corrisponde a un diverso diagramma di deformazioni

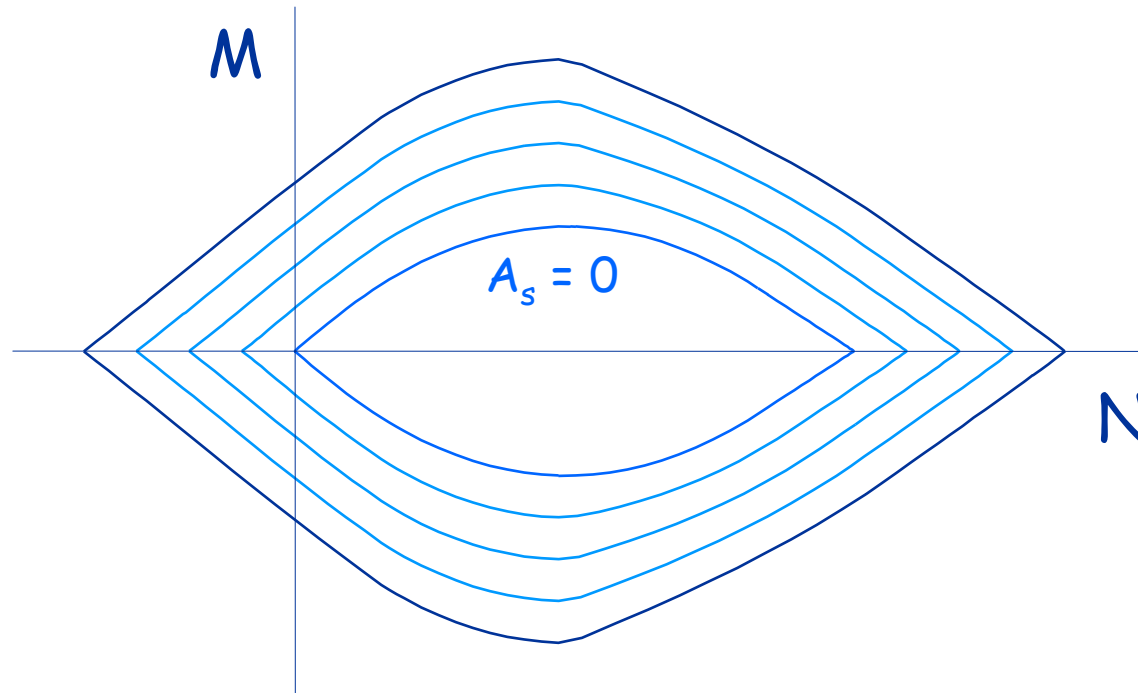


# Domini di resistenza - stato limite ultimo



# Domini di resistenza - stato limite ultimo

Cambiando l'armatura, si ottengono tanti diagrammi

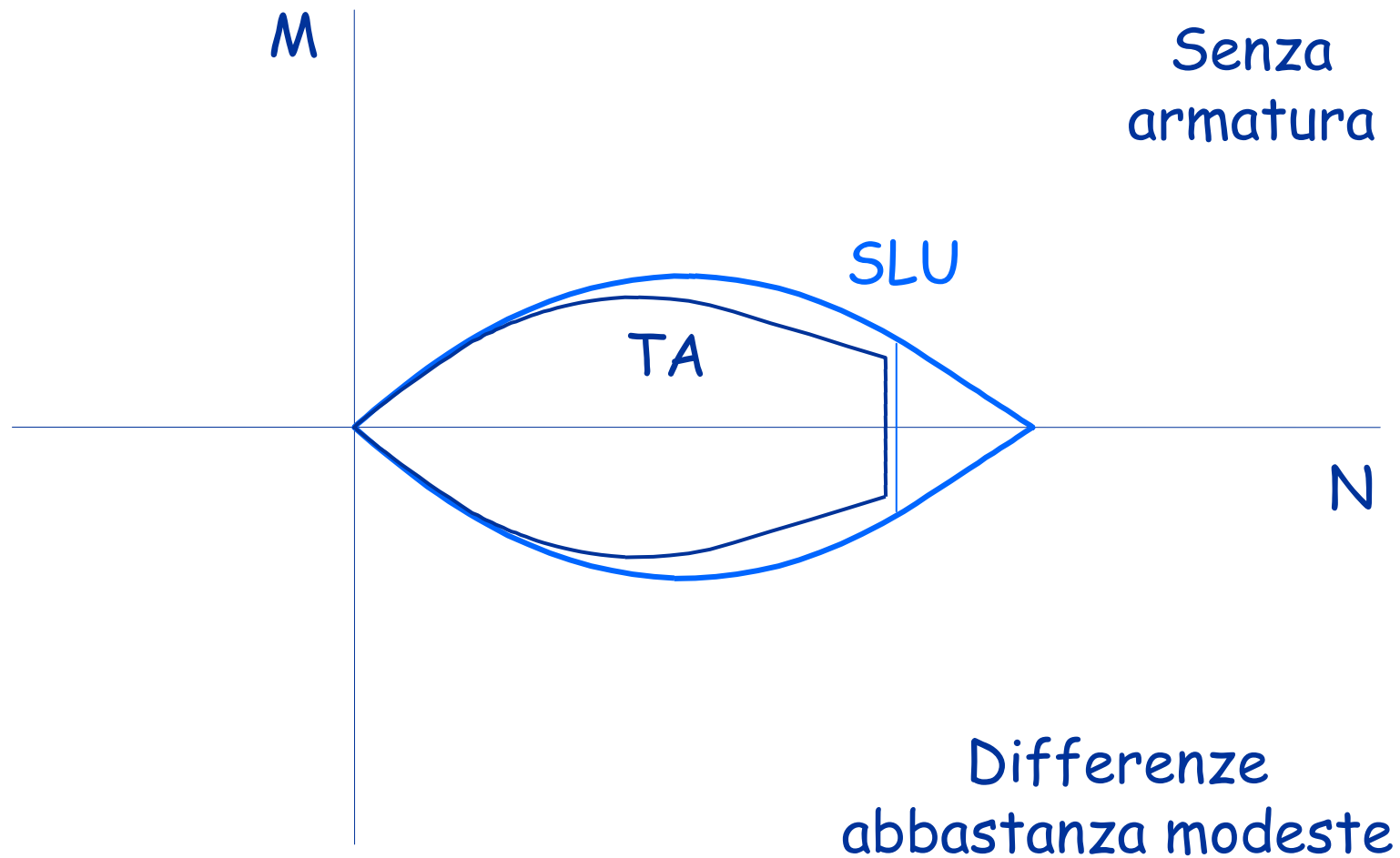


## Domini: confronto tra TA e SLU

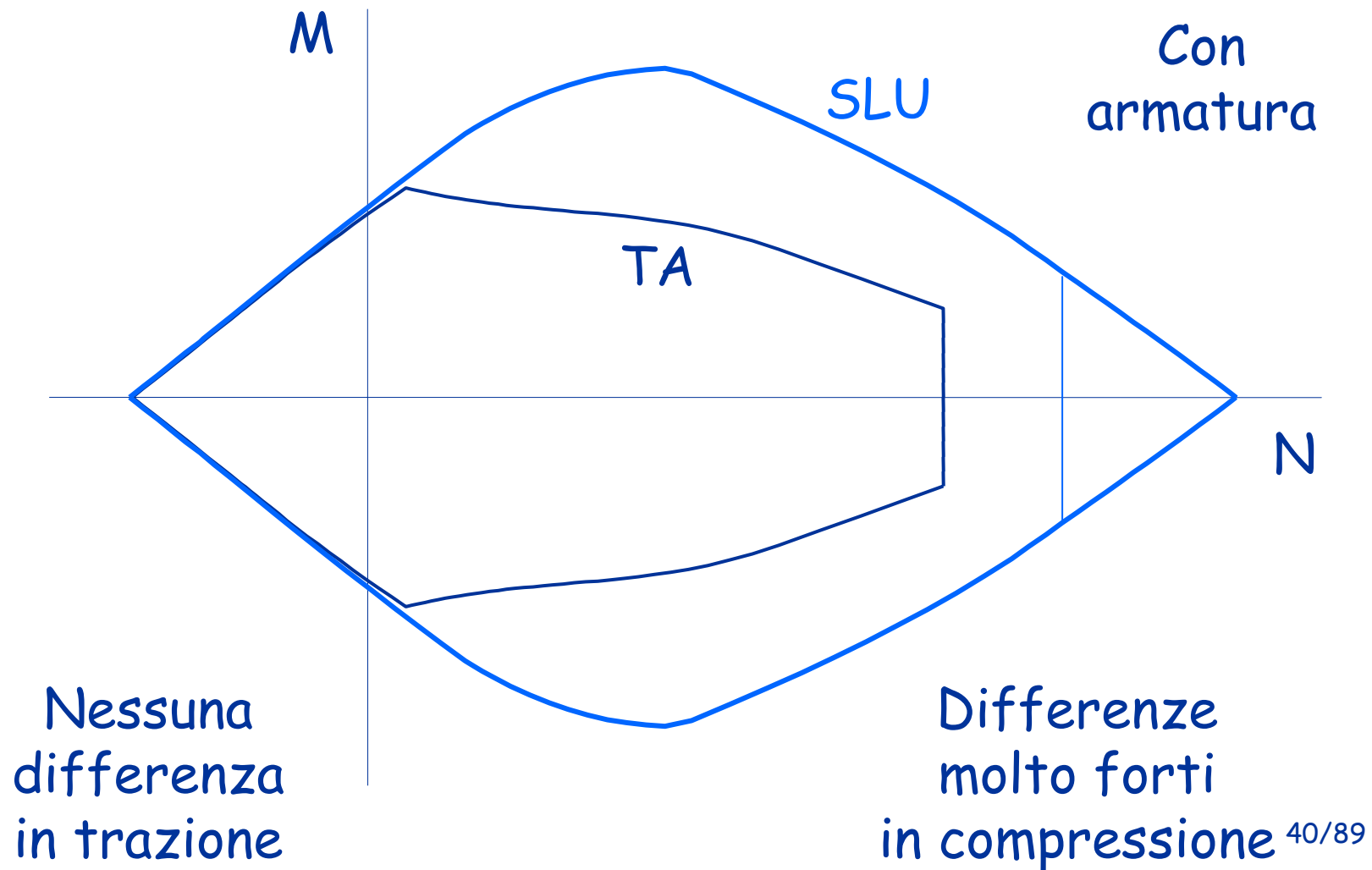
Il confronto può essere effettuato sovrapponendo i domini ricavati per TA e SLU

Poiché i carichi allo SLU sono maggiori (circa 1.4 volte) di quelli alle TA, il dominio relativo alle TA deve essere opportunamente scalato (ad esempio  $\times 1.4$ )

## Domini: confronto tra TA e SLU



# Domini: confronto tra TA e SLU



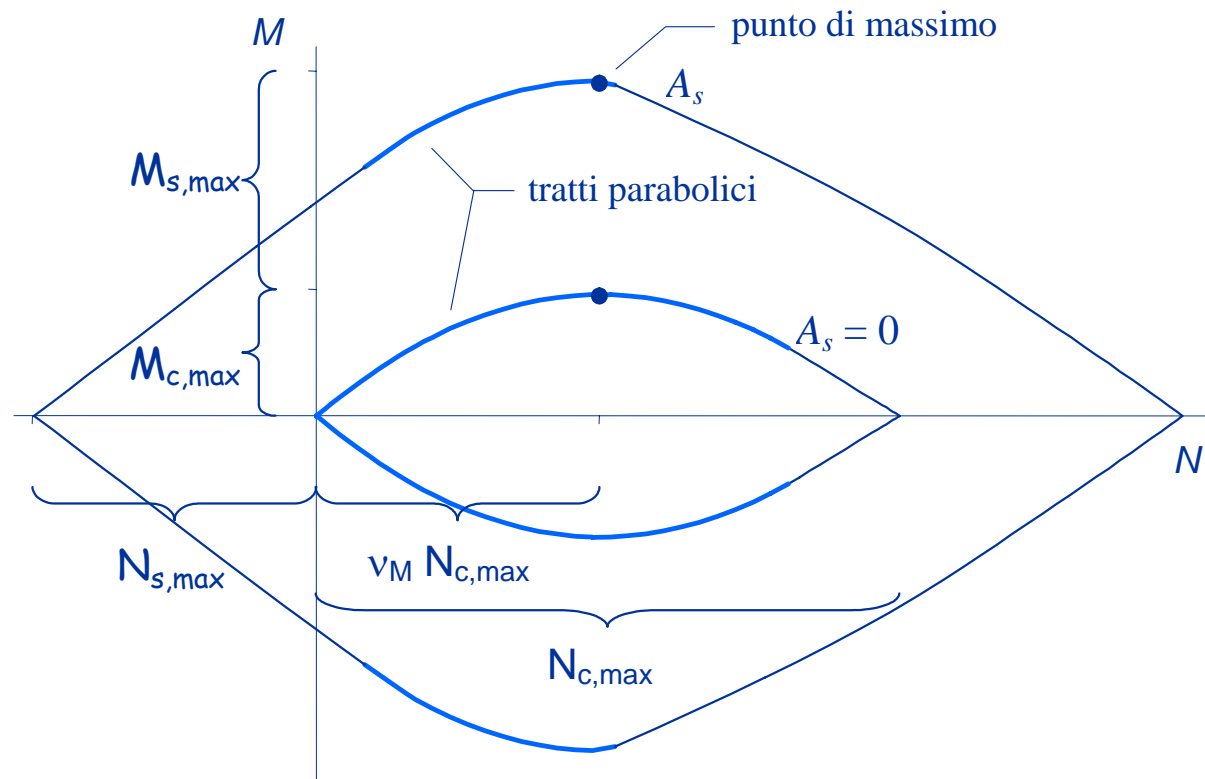


Progetto e verifica allo SLU  
con i domini M-N

sezioni rettangolari,  $A_s = A'_s$

# Dominio M-N allo SLU

L'andamento delle curve è in più tratti parabolico



## Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left( \frac{h}{2} - c \right)$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

## Dominio M-N allo SLU

Quando entrambe le armature sono snervate

$$N = \beta b x f_{cd}$$

$$N = \frac{289}{584} b h f_{cd} \cong 0.48$$

$$M = \beta b x f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left( \frac{h}{2} - c \right)$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} + A_s f_{yd} (h - 2c) \cong 0.12$$

Il punto di massimo momento si ottiene derivando M

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow \beta b f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h$$

Per questo valore di x si ha

# Dominio M-N allo SLU

Nel punto di massimo

$$N = v_M N_{c,max}$$

$$N_{c,max} = b h f_{cd}$$

$$v_M \cong 0.48$$

$$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$

$$N = \frac{289}{584} b h f_{cd} \cong 0.48$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} + A_s f_{yd} (h - 2 c) \cong 0.12$$

Inoltre:  
contributo  
dell'armatura

$$M = M_{c,max} + M_{s,max}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$$

Infine:  
massimo sforzo  
normale di trazione

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$$

# Dominio M-N allo SLU

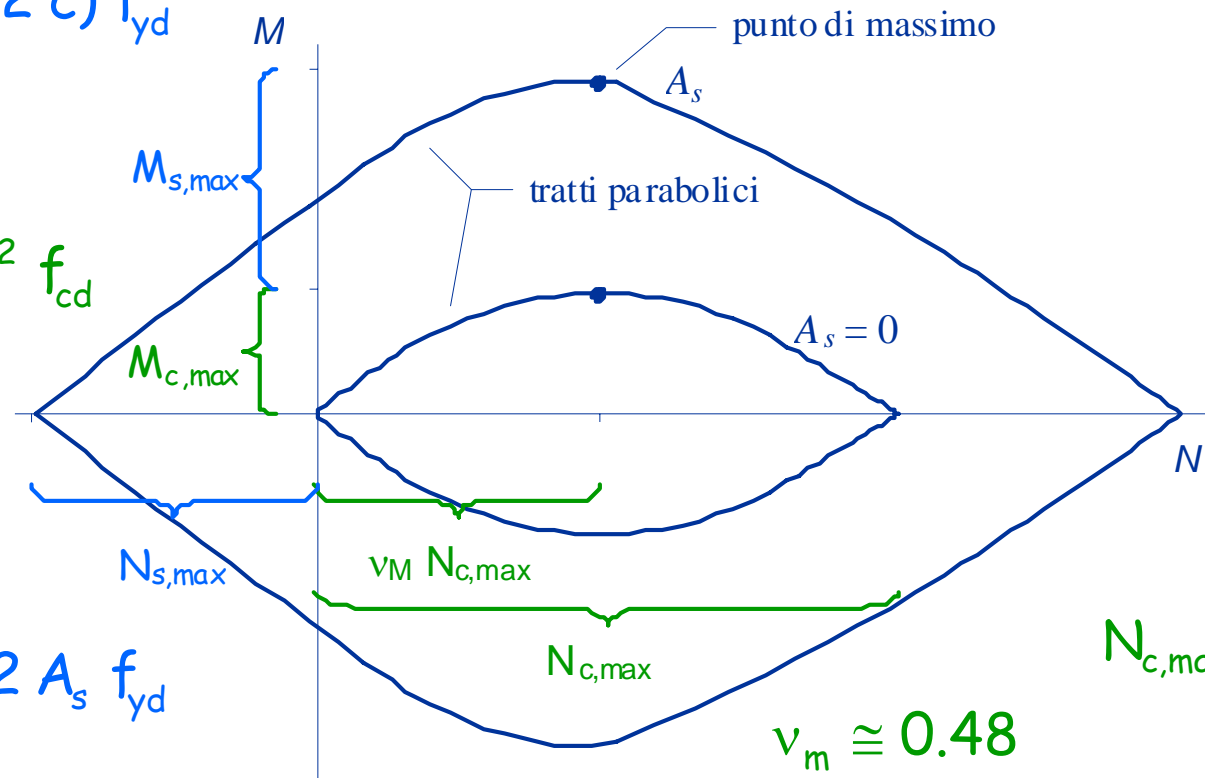
$$M_{s,max} =$$

$$= A_s (h - 2c) f_{yd}$$

$$M_{c,max} =$$

$$\cong 0.12 b h^2 f_{cd}$$

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$$



$$N_{c,max} = b h f_{cd}$$

$$v_m \cong 0.48$$

## Valori base per dominio M-N

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,max} = b h f_{cd}$	$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}$
M	$M_{c,max} \cong 0.12 b h^2 f_{cd}$	$M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}$

# Formulazione analitica

Momento resistente  $M_{Rd}$  in funzione di  $N_{Rd}$ :

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \right]$$

con  $m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$



# Formulazione analitica

Verifica di resistenza:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

con  $m = 1 + \frac{0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max} + N_{s,Rd}}$

## Formule alternative

– per  $N_{Ed} < 0$  (tensoflessione)  $M_{Rd} = M_{s,max} \left( 1 + \frac{N_{Ed}}{N_{s,max}} \right)$

– per  $0 < N_{Ed} < 0.48 N_{c,Rd}$

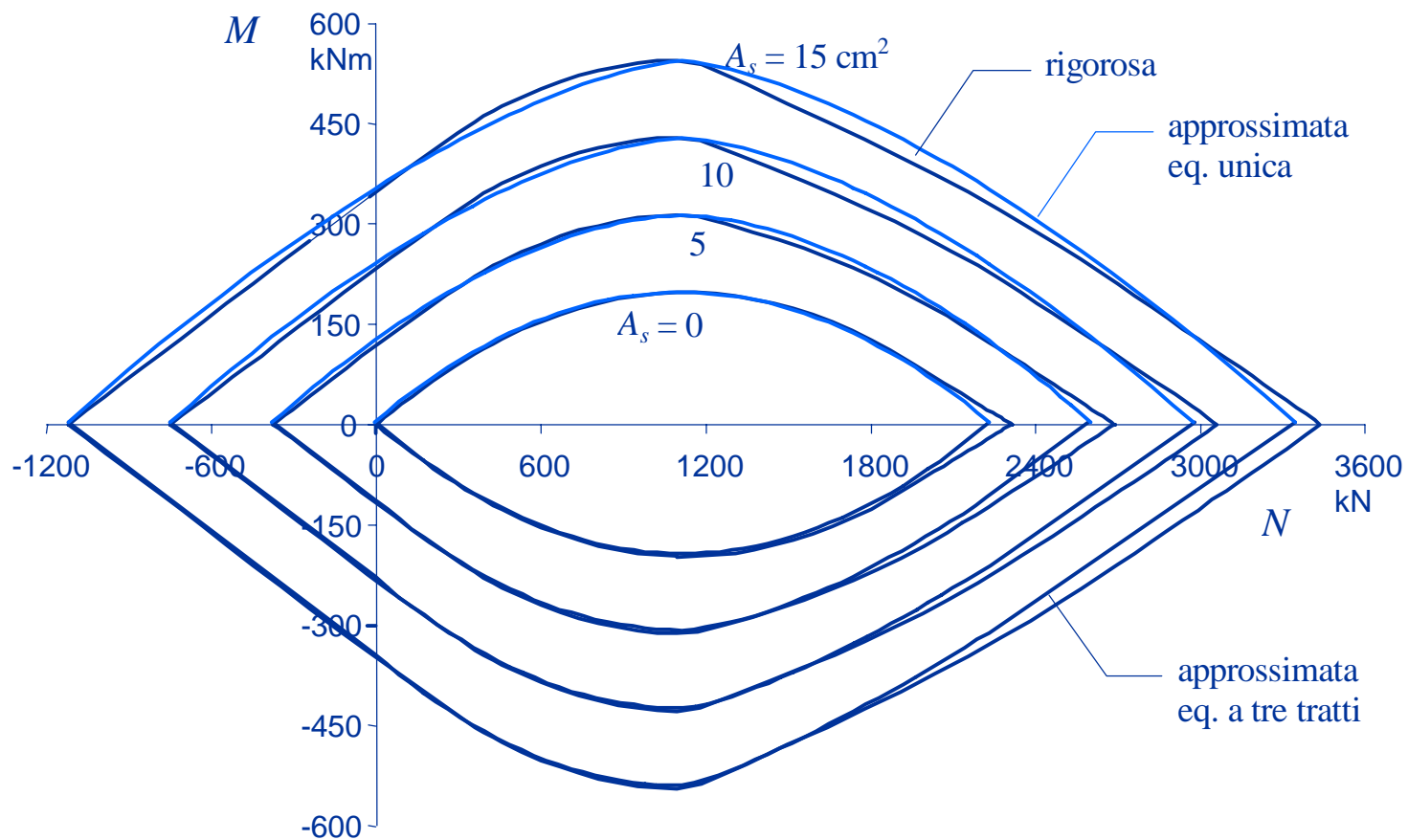
$$M_{Rd} = M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}}{0.48 N_{c,max}} \right)^2 \right] + M_{s,max}$$

– per  $N_{Ed} > 0.48 N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \left( \frac{|N_{Ed} - 0.48 N_{c,max}|}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^n \right]$$

con  $n = 1 + \left( \frac{0.48 N_{c,max}}{0.52 N_{c,max} + N_{s,max}} \right)^2$

# Confronto



# Esempio - verifica a pressoflessione

## Dati geometrici

Sezione 40x70

$$A_s = A'_s = 3 \text{ } \varnothing 14$$

## Materiale

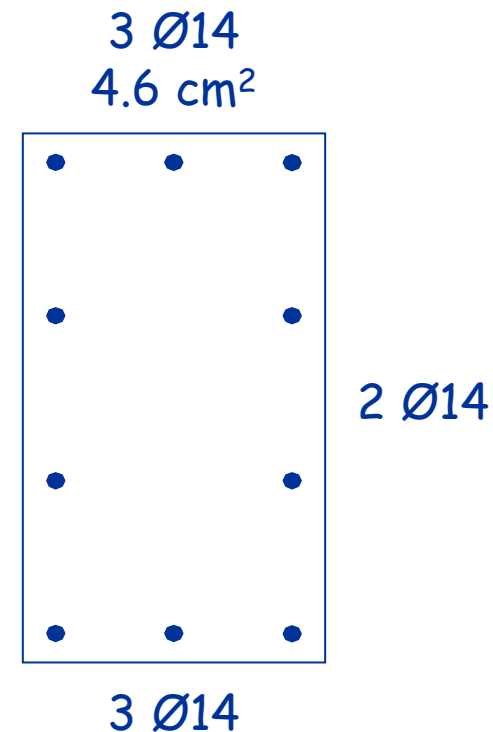
Calcestruzzo C25/30

Acciaio B450C

## Sollecitazioni

$$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$$



## Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti del calcestruzzo:

$$N_{c,max} = b h f_{cd} = 0.40 \times 0.70 \times 14.2 \times 10^3 = 3976 \text{ kN}$$

$$V_M N_{c,Rd} = 0.486 \times 3976 = 1932 \text{ kN}$$

$$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd} = 0.1216 \times 0.40 \times 0.70^2 \times 14.2 \times 10^3$$

$$M_{c,max} = 338.4 \text{ kNm}$$

# Esempio - verifica a pressoflessione

Valori resistenti dell'acciaio:

$$N_{s,max} = 2 A_s f_{yd} = 2 \times 4.62 \times 391 \times 10^{-1}$$

$$N_{s,max} = 361.2 \text{ kN}$$

$$M_{s,max} = A_s (h - 2c) f_{yd} = 4.62 \times (0.70 - 2 \times 0.04) \times 391 \times 10^{-1}$$

$$M_{s,max} = 112.0 \text{ kNm}$$

# Esempio - verifica a pressoflessione

Momento resistente:

$$m = 1 + \frac{v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} = 1 + \frac{1932}{1932 + 361.2} = 1.842$$

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{s,max}) \left[ 1 - \frac{N_{Rd} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right]^m =$$

$$= (338.4 + 112.0) \left[ 1 - \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right]^{1.842} =$$

$$= 408.5 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm} < M_{Rd}$$

Sezione  
verificata

## Esempio - verifica a pressoflessione

Oppure:

$$m = 1.842$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{c,max} + M_{s,max}} + \left| \frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{s,max}} \right|^m \leq 1$$

$$\frac{400}{338.4 + 112.0} + \left| \frac{1300 - 1932}{1932 + 361.2} \right|^{1.842} =$$
$$= 0.888 + 0.093 = 0.981 \leq 1$$

Sezione  
verificata



# Progetto dell'armatura

Il momento affidato alle armature è

$$M_{s,Ed} = M_{Ed} - M_{c,max} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Ed} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max}} \right)^2 \right]$$

L'armatura necessaria è quindi

$$A_s = \frac{M_{s,Ed}}{z f_{yd}}$$

$z$  è il braccio della coppia interna  
costituita dalle armature

$$z = h - 2c \cong 0.9d$$

Nota: la formula vale rigorosamente solo per  $0 \leq N_{Ed} \leq v_M N_{c,max}$

# Esempio - progetto dell'armatura

Dati geometrici

Sezione 40x70

Sollecitazioni

$$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$$

$$M_{Ed} = 400 \text{ kNm}$$

$$M_{s,Ed} = 400 - 338.4 \left[ 1 - \left( \frac{1300 - 1932}{1932} \right)^2 \right] = 97.8 \text{ kNm}$$

Armatura necessaria:

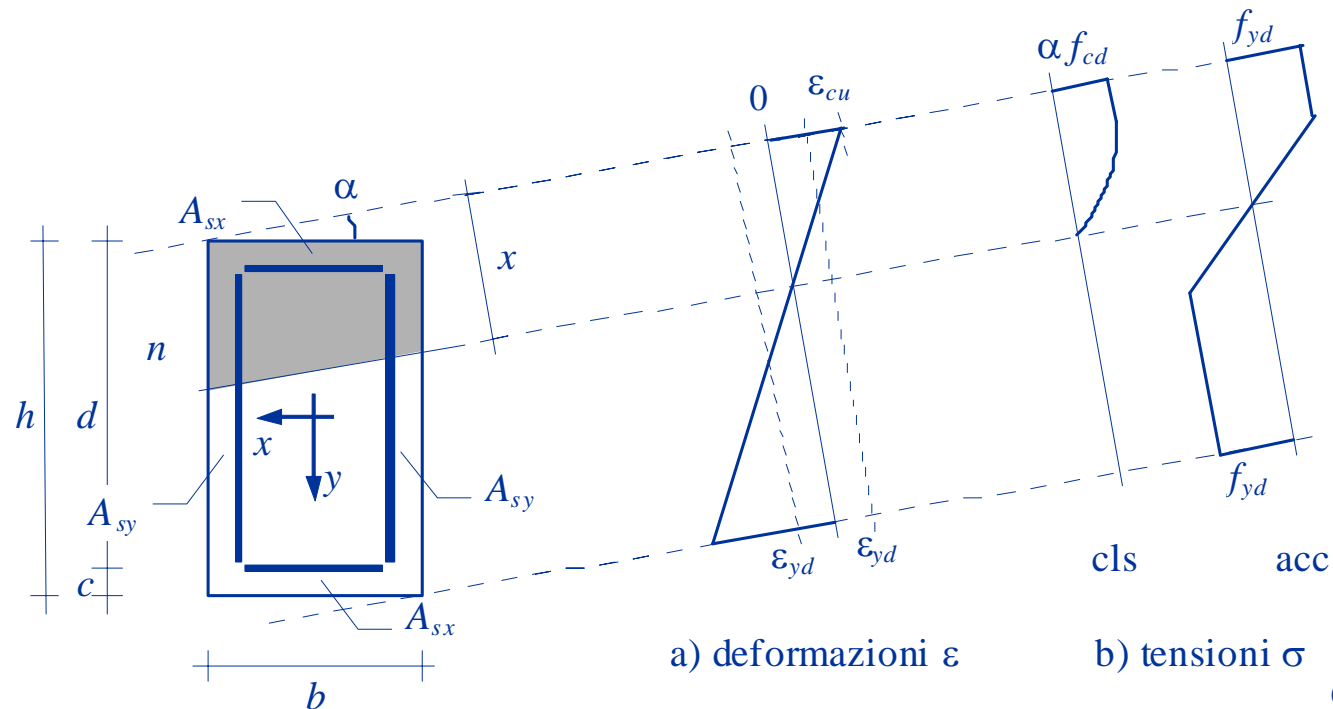
$$A_s = \frac{97.8}{0.9 \times 0.66 \times 391} \times 10 = 4.2 \text{ cm}^2$$

Domini M-N  
per flessione composta deviata

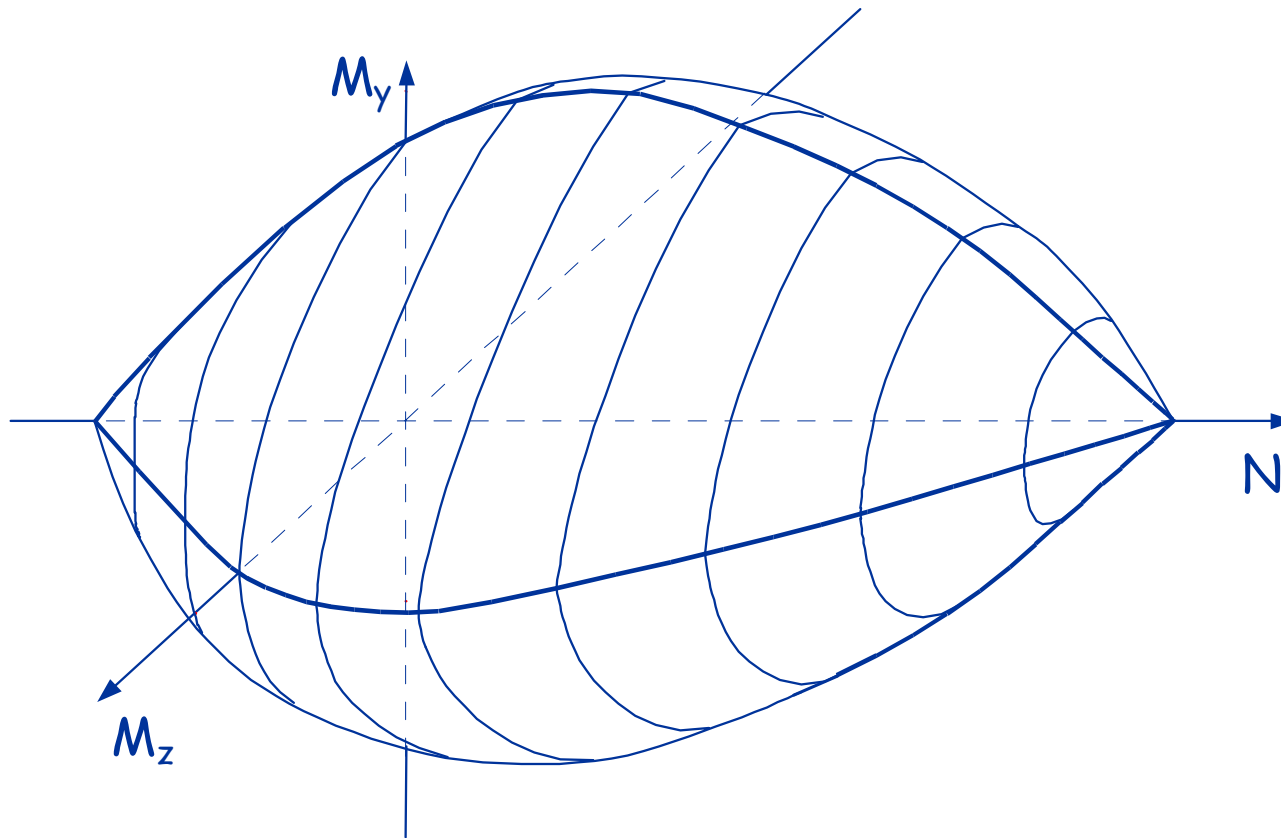
# Pressoflessione deviata

Procedimento per la costruzione del dominio  $M_x$ - $M_y$ - $N$

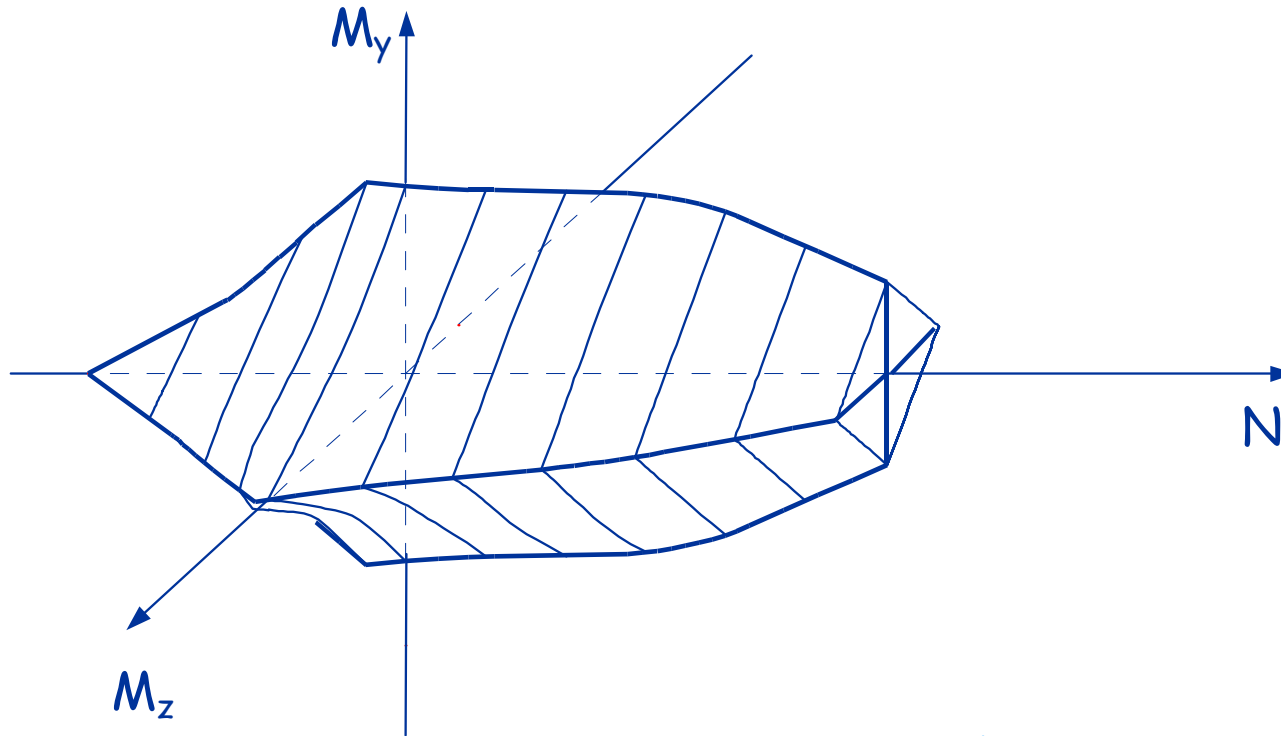
- analogo a quello descritto per pressoflessione retta
- più complicato per l'inclinazione dell'asse neutro



# Dominio allo SLU

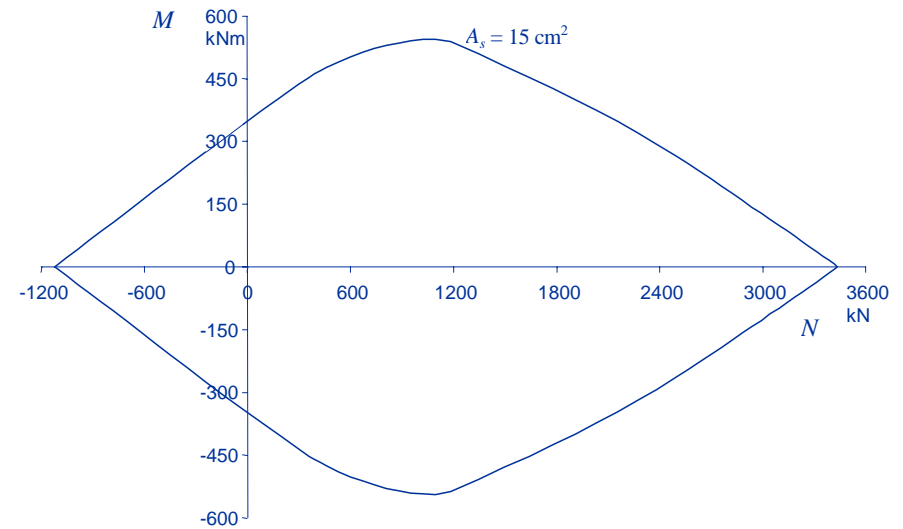
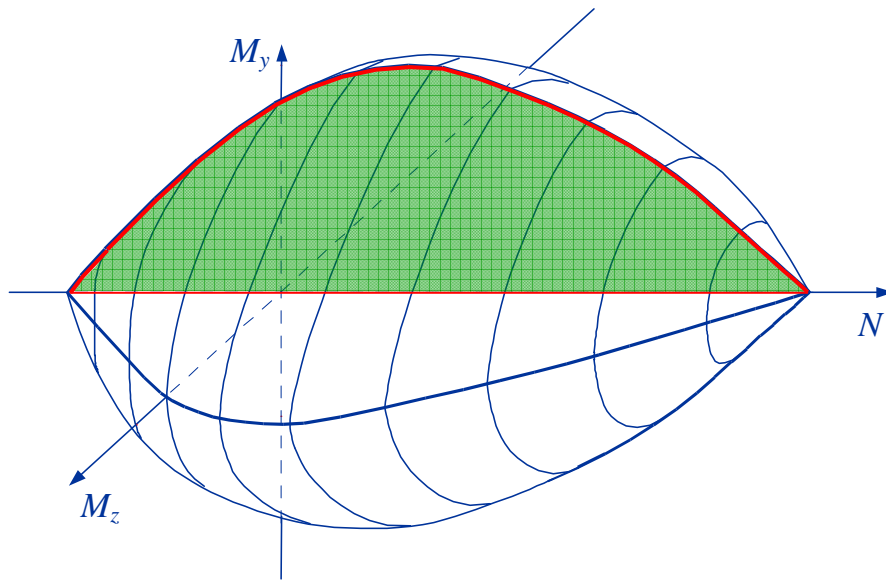


# Dominio alle TA

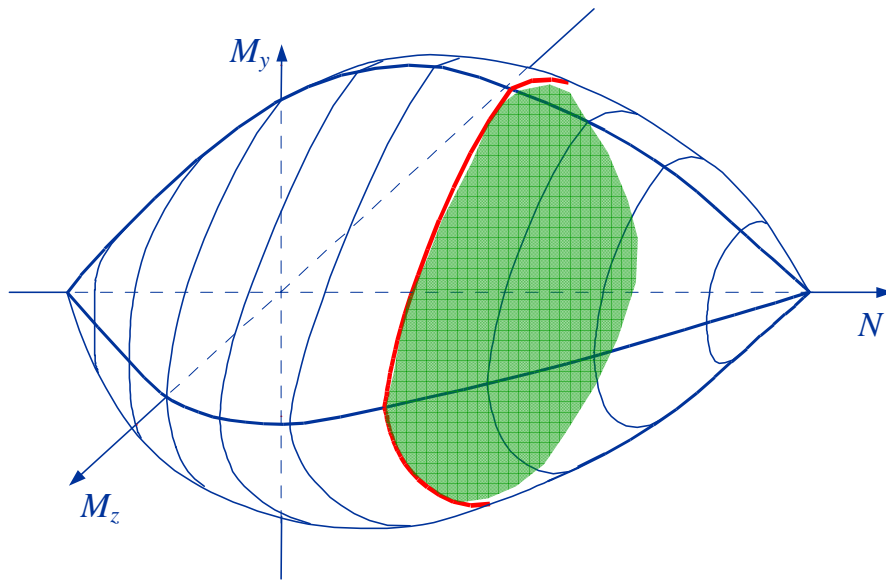


Notare la sezione trasversale:  
la presenza contemporanea di  
 $M_y$  e  $M_z$  è molto penalizzante

# Dominio allo SLU



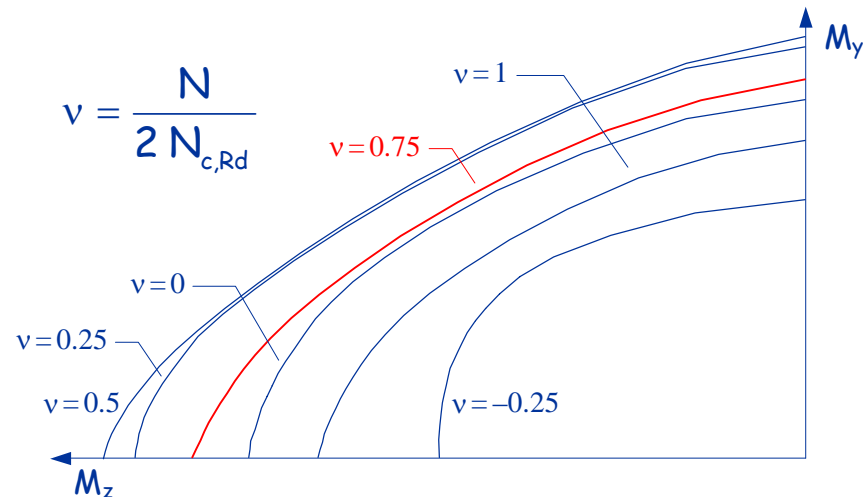
# Dominio allo SLU



Nota: per  $N \neq 0$  si può usare un esponente maggiore, fino a 2

$$\left( \frac{M_x}{M_{x,Rd}} \right)^p + \left( \frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1$$

Consiglio:  
usare  $p = q = 1.5$

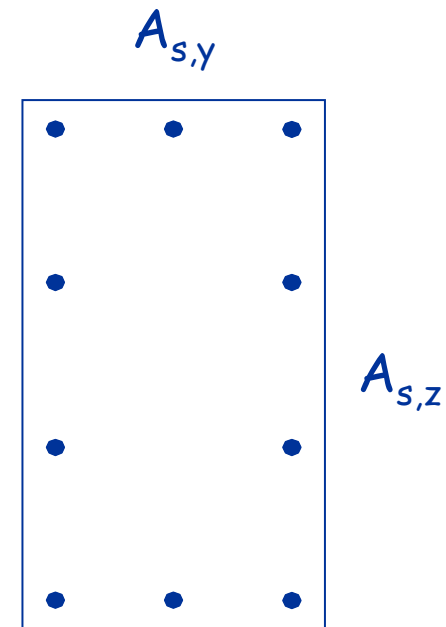




# Considerazioni

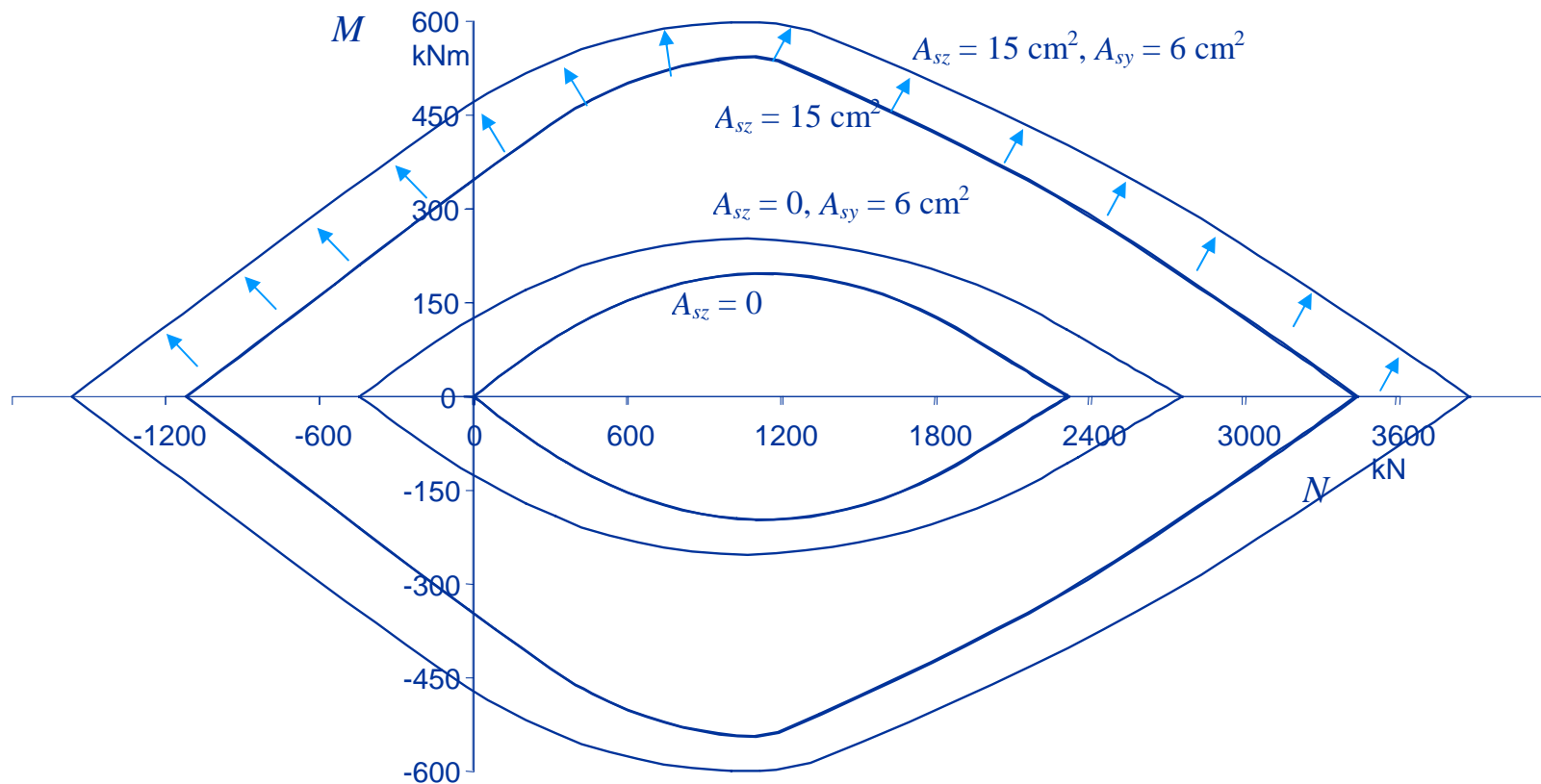
Nel calcolare il momento resistente  $M_{Rd,y}$  si dovrebbe prendere in considerazione anche l'armatura sul lato verticale

e viceversa



# Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente



# Considerazioni

Ciò porterebbe ad un incremento del momento resistente

$$M_{Rd} = (M_{c,max} + M_{sz,max} + M_{sy,max}) \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} - v_M N_{c,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)^m \right]$$

con 
$$m = 1 + \left( \frac{v_M N_{c,max} + N_{sy,max}}{v_M N_{c,max} + N_{sz,max} + N_{sy,max}} \right)$$

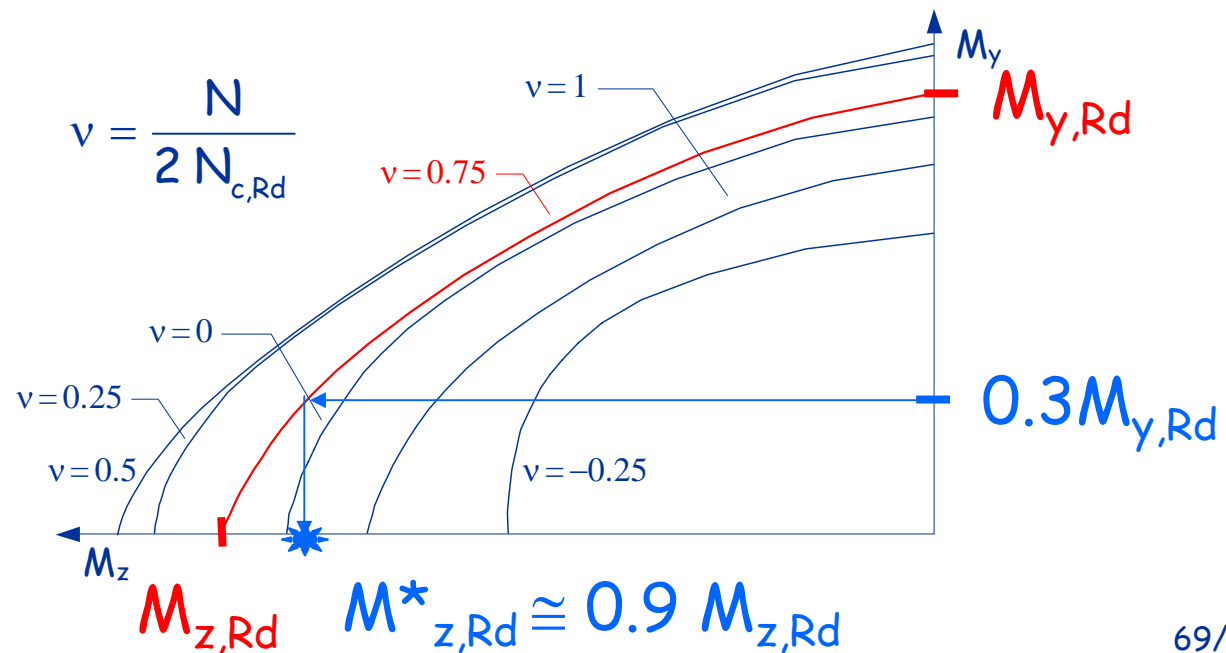
## Valori base per dominio M-N includendo l'armatura "di parete"

	Calcestruzzo	Acciaio
N	$N_{c,max} = \frac{289}{594} b h f_{cd}$	<del><math>N_{s,max} = 2 A_s f_{yd}</math></del> $N_{s,max} = 2 (A_s + A_{s,p}) f_{yd}$
M	$M_{c,max} = \frac{289}{2376} b h^2 f_{cd}$	<del><math>M_{s,max} = A_s (h - 2 c) f_{yd}</math></del> $M_{s,max} = (A_s + 0.4 A_{s,p}) (h - 2 c) f_{yd}$

E' possibile usare le stesse formule modificando  $N_{s,max}$  e  $M_{s,max}$

# Considerazioni

Contemporaneamente, la presenza di momento nella direzione trasversale riduce il momento resistente



# Indicazioni operative

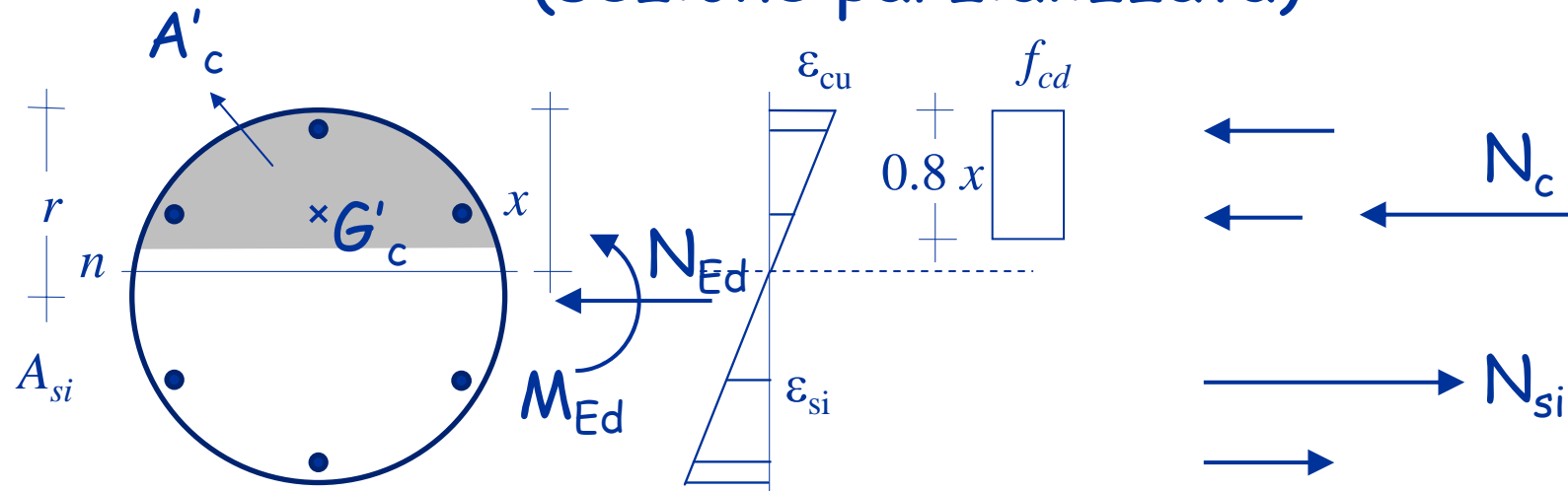
Finché il momento trasversale non è eccessivo, i due effetti si compensano

E' possibile progettare a pressoflessione retta, separatamente per le due direzioni,

e poi effettuare un controllo a pressoflessione deviata

Verifica di  
sezioni di forma generica

# Verifica sezione circolare (sezione parzializzata)



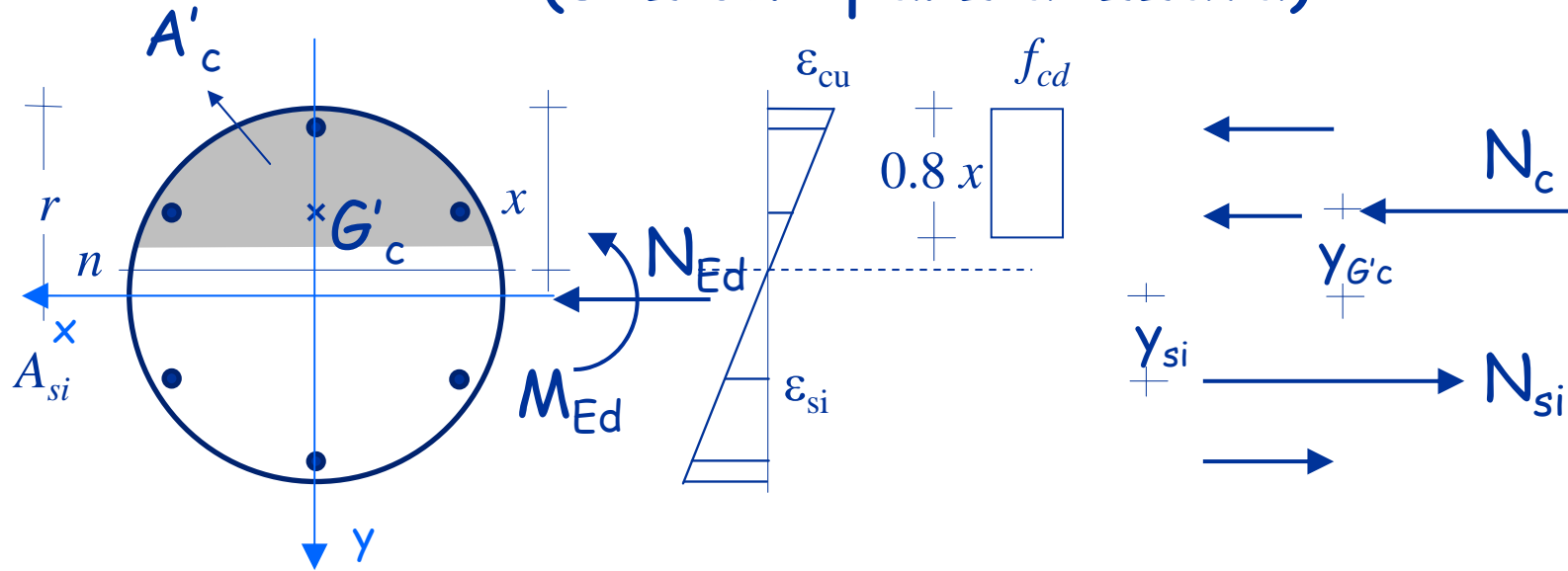
Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \sum N_{si} = N_{Ed}$$

Posso ricavare  $x$  per tentativi



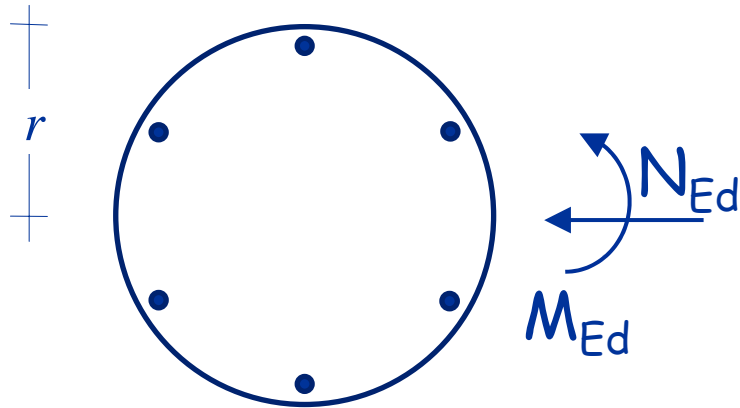
# Verifica sezione circolare (sezione parzializzata)



Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c y_{G'_c} + \sum N_{si} y_{si}$$

# Esempio



Dati:

Sezione  $r = 20 \text{ cm}$

$c = 4 \text{ cm}$

Armature  $6\varnothing 14$

Calcestruzzo  $C25/30$

Acciaio  $B450C$

$M_{Ed} = 45 \text{ kNm}$ ;  $N_{Ed} = -500 \text{ kNm}$

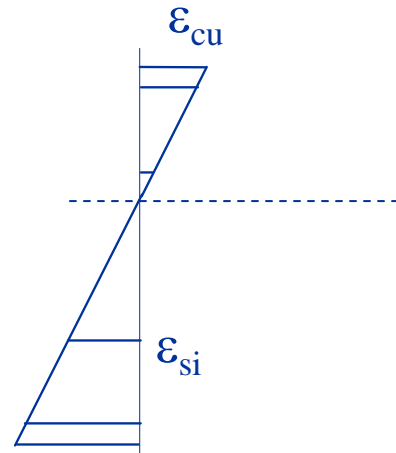
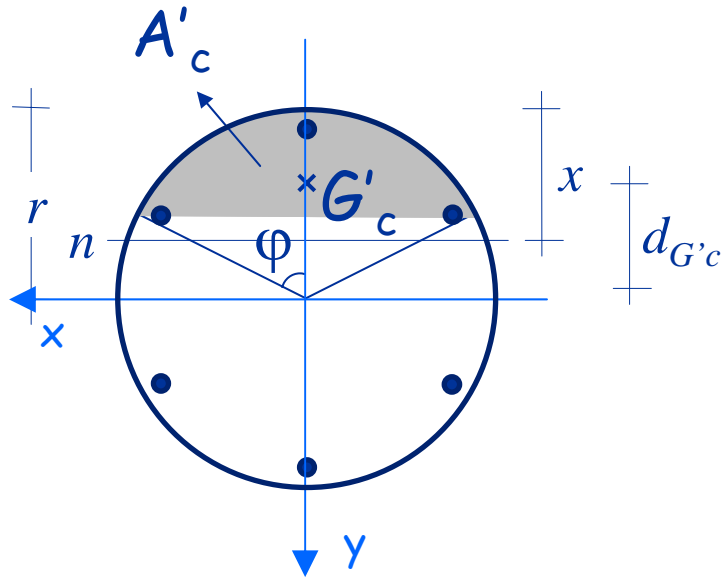
Procedura:

1 - individuazione dell'asse neutro per tentativi

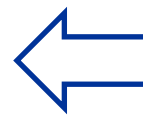
2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

# Calcolo di $N_c$



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$



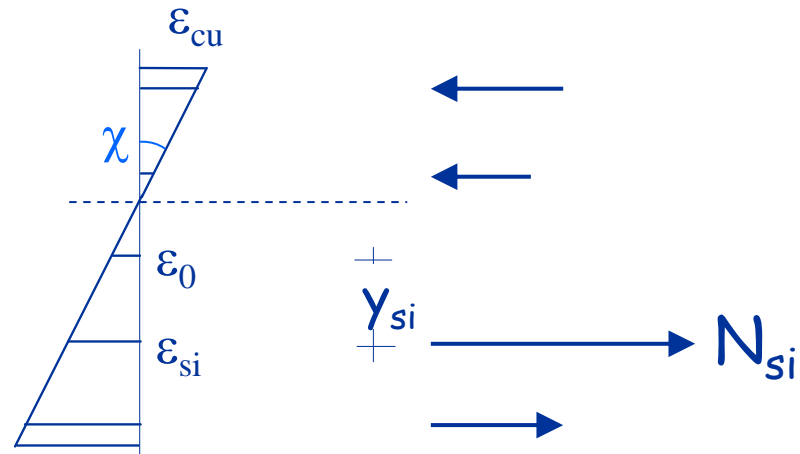
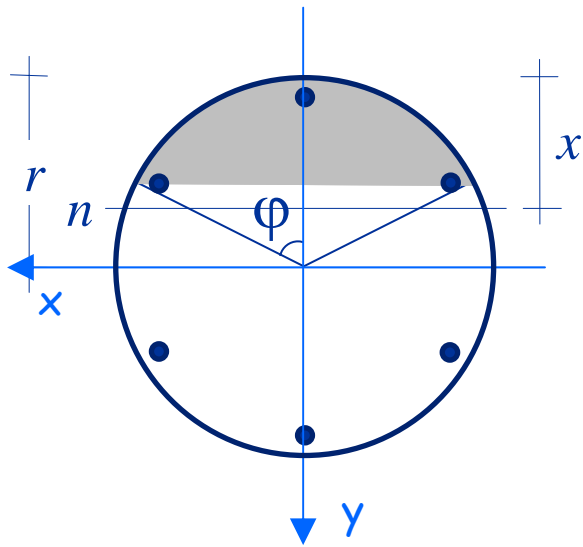
$$h = 0.8 x$$

$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$N_c = A'_c f_{cd}$$

$$y_{G'c} = -d_{G'c} = -\frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A'_c}$$

## Calcolo di $N_{si}$

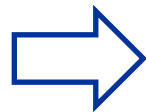


$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

$$\epsilon_0 = -\epsilon_{cu} \left( 1 - \frac{r}{x} \right)$$

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{x}$$

$$\epsilon_{si} = \epsilon_0 + \chi y_{si}$$



$$\sigma_{si} = -f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \leq -\epsilon_{yd}$$

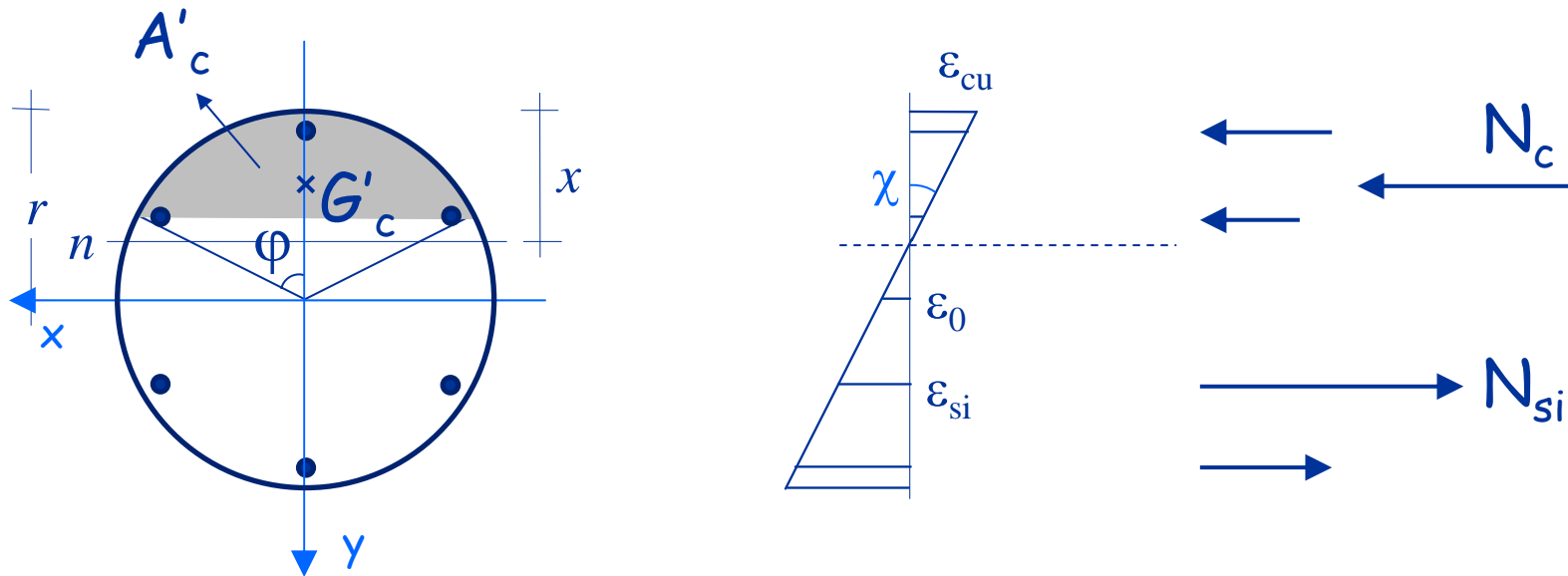
$$\sigma_{si} = E \epsilon_{si}$$

$$-\epsilon_{yd} < \epsilon_{si} < \epsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \geq \epsilon_{yd}$$

## Determinazione di $x$



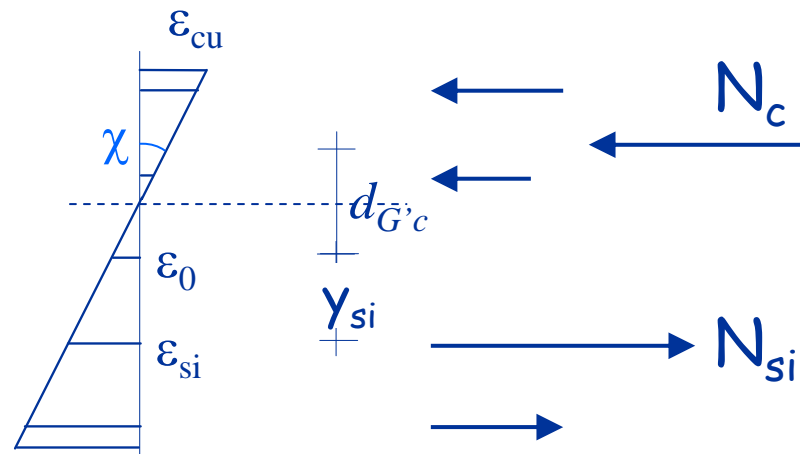
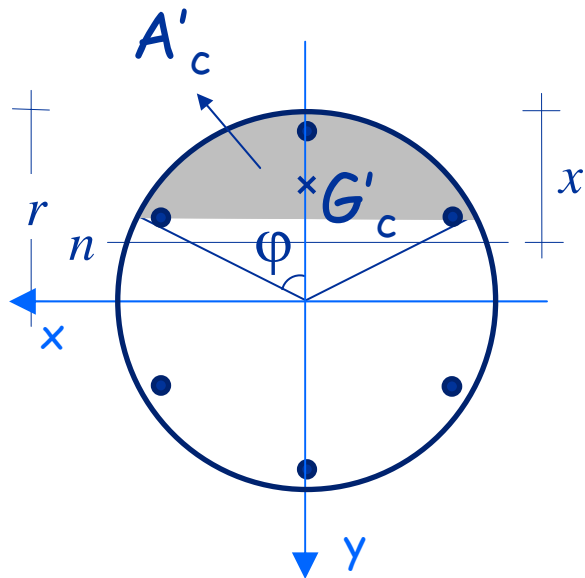
Per tentativi ricavo  $x = 17.4 \text{ cm}$

$$N_c = -550.6 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = -69.9 \text{ kN}; \quad N_{s3} = 120.5 \text{ kN}; \quad N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = -500 \text{ kN}$$

# Determinazione di $M_{Rd}$



$$N_c = -550.6 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}$$

$$N_{s2} = -69.9 \text{ kN}$$

$$N_{s3} = 120.5 \text{ kN}$$

$$N_{s4} = 60.2 \text{ kN}$$

$$y_{G'_c} = -11.9 \text{ cm}$$

$$y_{s1} = -16 \text{ cm}$$

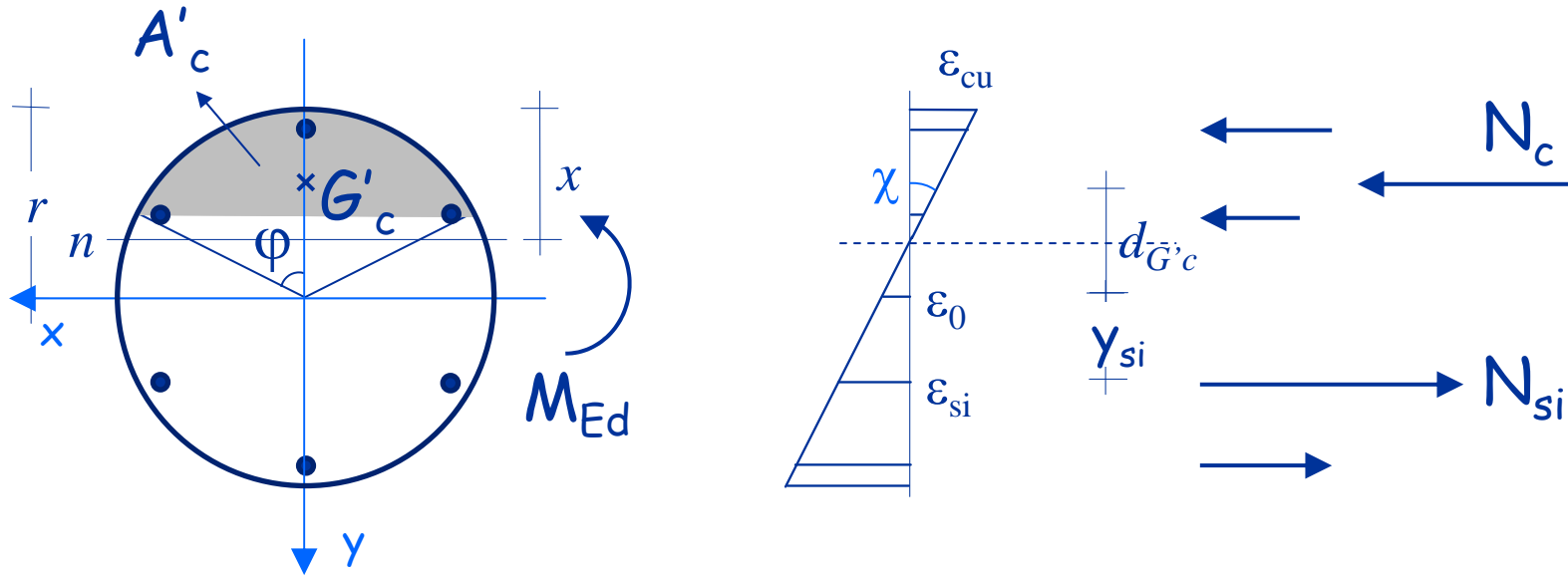
$$y_{s2} = -8 \text{ cm}$$

$$y_{s3} = 8 \text{ cm}$$

$$y_{s4} = 16 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 99.9 \text{ kNm}$$

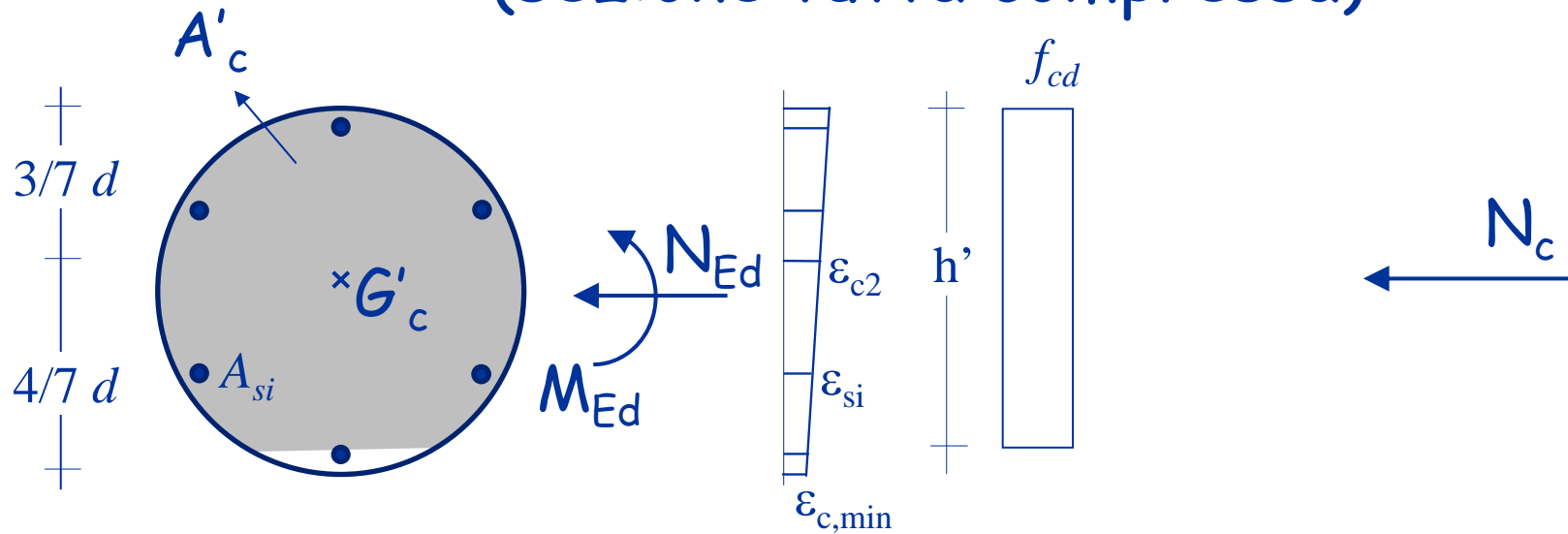
# Verifica



$$M_{Ed} = 45 \text{ kNm} < M_{Rd} = 99.9 \text{ kNm}$$

La sezione è verificata

# Verifica sezione circolare (sezione tutta compressa)



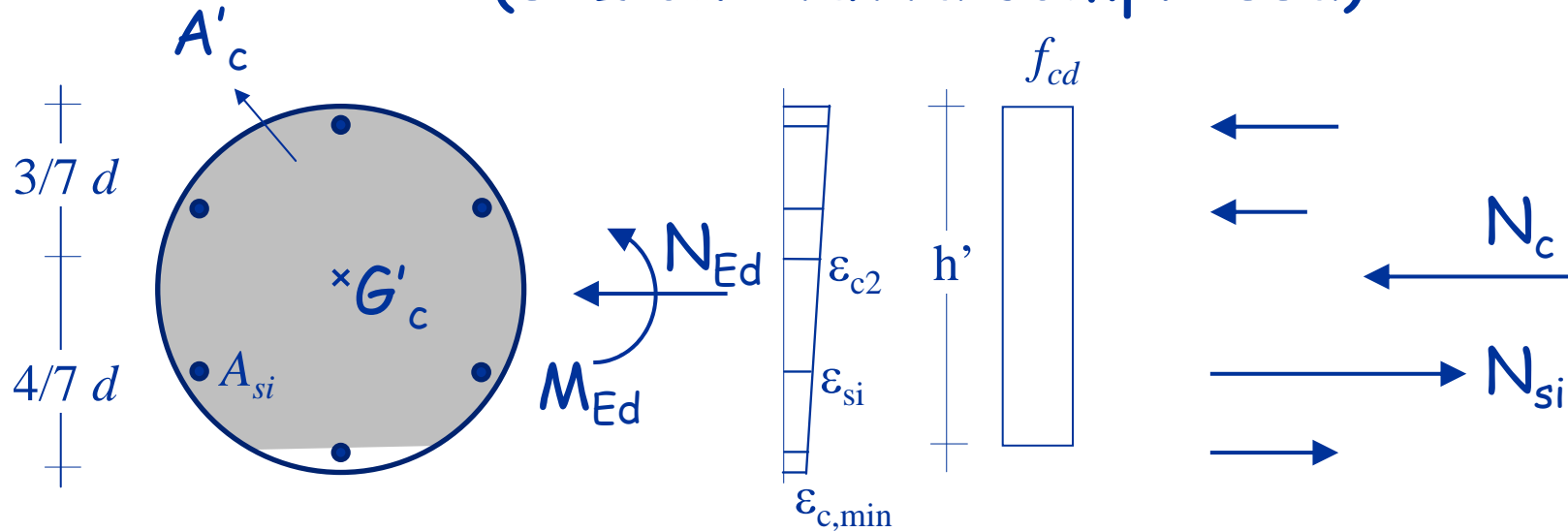
Si può considerare un diagramma costante  $\sigma_c = f_{cd}$  per un'altezza  $h'$

$$h' = d \left[ 1 - 0.2 (1 - \eta_{min})^2 \right]$$

$$\eta_{min} = \frac{\epsilon_{c,min}}{\epsilon_{c,2}}$$



# Verifica sezione circolare (sezione tutta compressa)

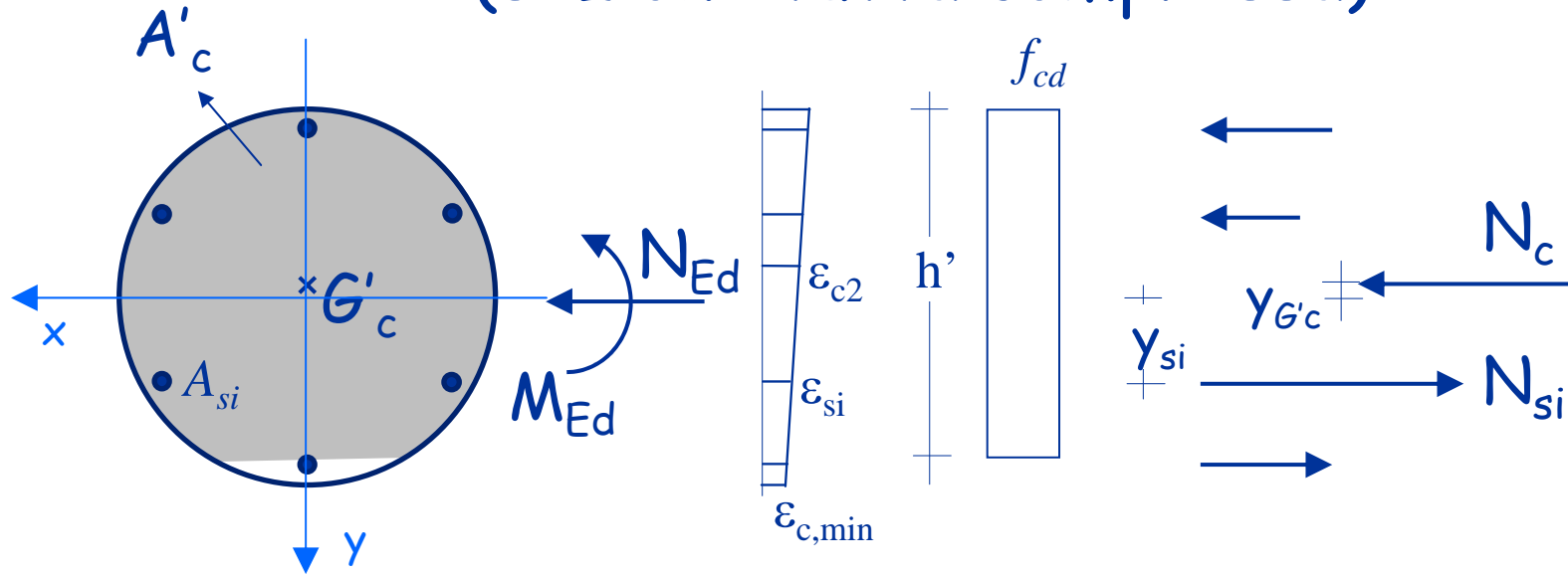


Per l'equilibrio alla traslazione deve essere:

$$N_c + \sum N_{si} = N_{Ed}$$

Posso ricavare  $\eta_{min}$  per tentativi

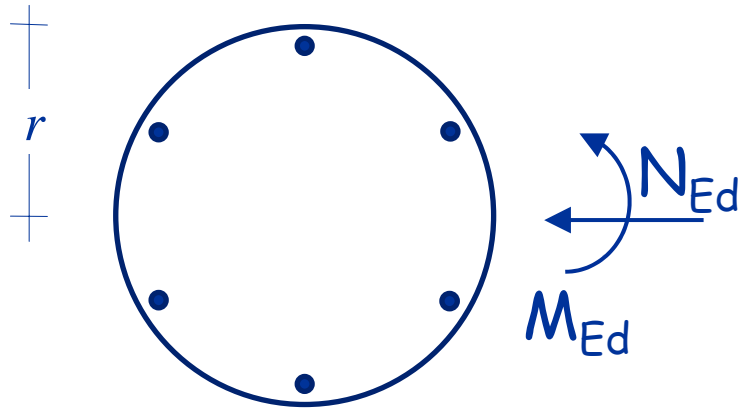
# Verifica sezione circolare (sezione tutta compressa)



Dall'equilibrio alla rotazione:

$$M_{Rd} = N_c y_{G'c} + \sum N_{si} y_{si}$$

# Esempio



Dati:

Sezione  $r = 20 \text{ cm}$

$c = 4 \text{ cm}$

Armature  $6\varnothing 14$

Calcestruzzo  $C25/30$

Acciaio  $B450C$

$M_{Ed} = 45 \text{ kNm}$ ;  $N_{Ed} = -2000 \text{ kNm}$

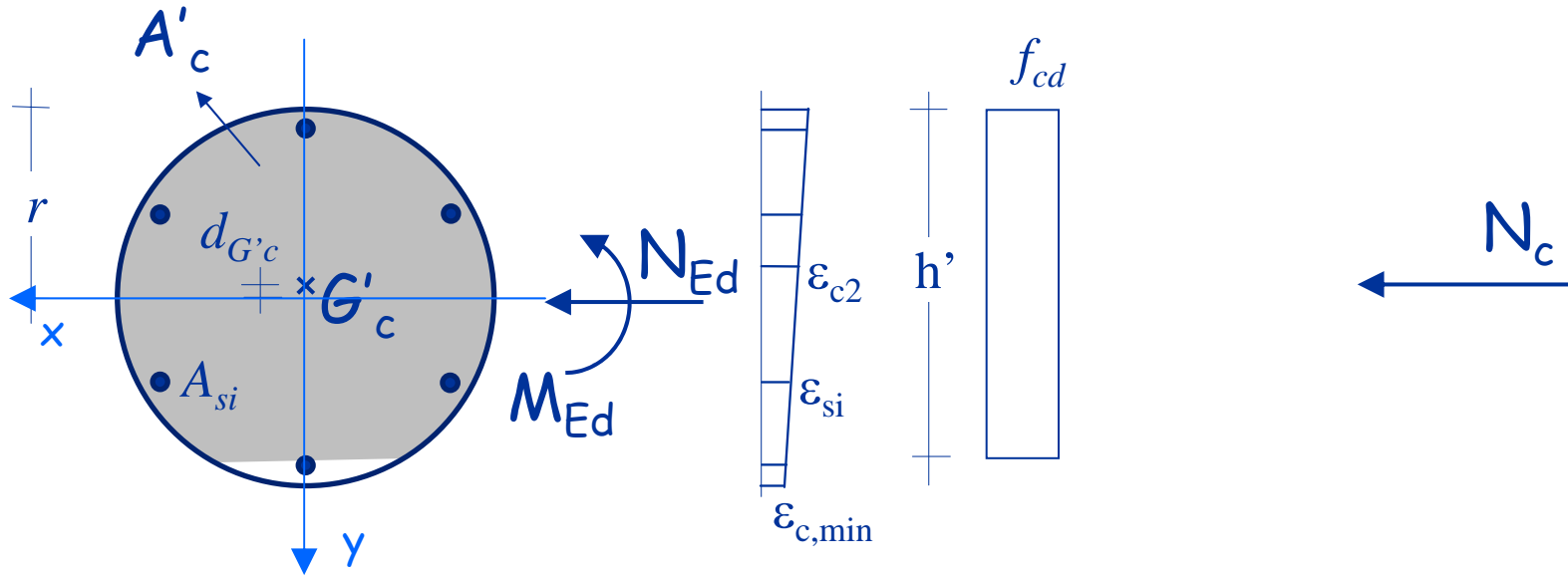
Procedura:

1 - individuazione di  $\eta_{min}$  per tentativi

2 - determinazione del momento resistente

3 - confronto tra  $M_{Ed}$  e  $M_{Rd}$

## Calcolo di $N_c$



$$\varphi = \arccos\left(\frac{r-h'}{r}\right)$$

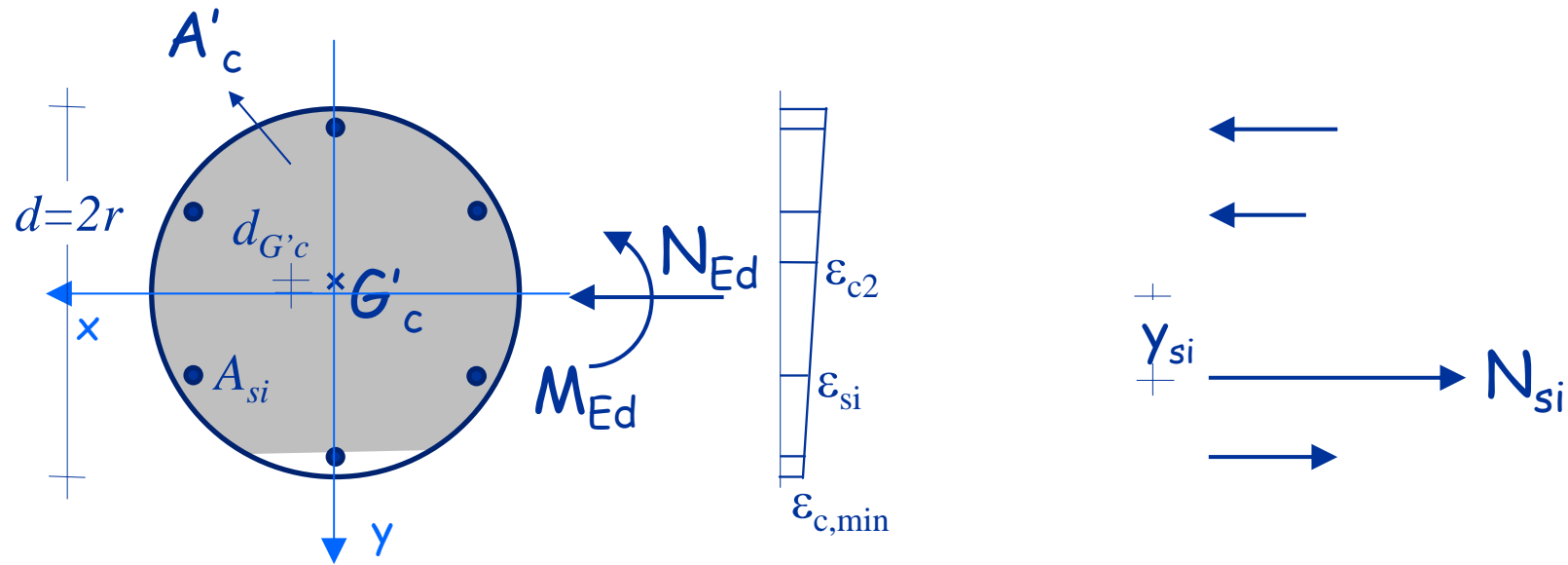
$$\leftarrow h' = 2r \left[ 0.8 - 0.2 (1 - \eta_{\min})^2 \right]$$

$$A'_c = \frac{1}{2} r^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$N_c = A'_c f_{cd}$$

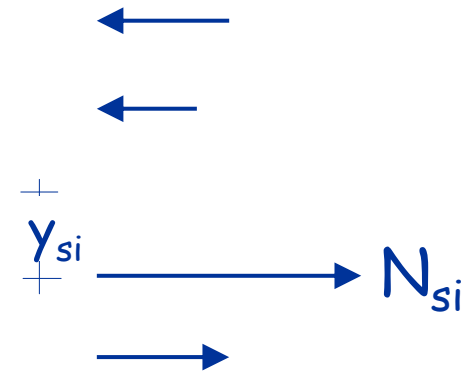
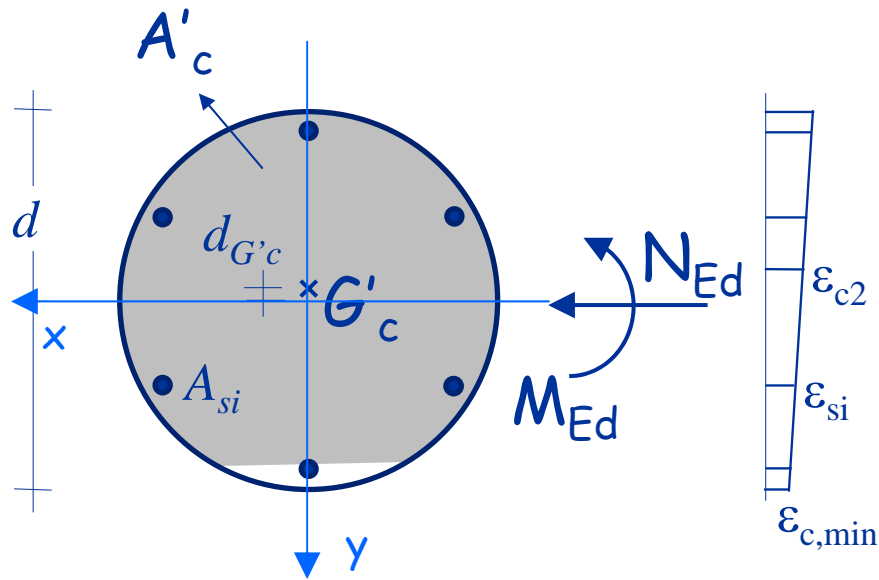
$$y_{G'_c} = -d_{G'_c} = -\frac{2 r^3 \sin^3 2\varphi}{3 A'_c}$$

## Calcolo di $N_{si}$



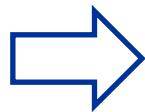
$$\epsilon_s = -\epsilon_{c2} \left[ \frac{r - y_{si}}{4/7 d} (1 - \eta_{min}) + \eta_{min} \right] \quad \dots$$

## Calcolo di $N_{si}$



$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si}$$

... noto  $\epsilon_{si}$



$$\sigma_{si} = -f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \leq -\epsilon_{yd}$$

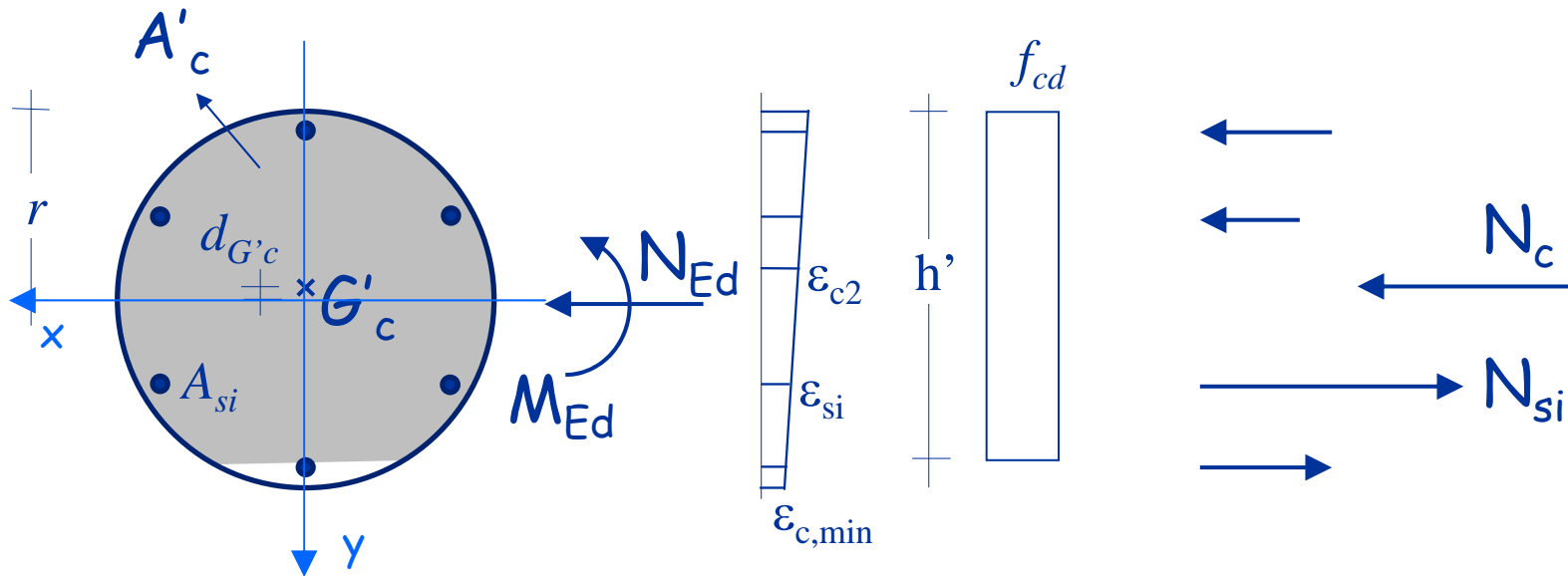
$$\sigma_{si} = E \epsilon_{si}$$

$$-\epsilon_{yd} < \epsilon_{si} < \epsilon_{yd}$$

$$\sigma_{si} = f_{yd}$$

$$\epsilon_{si} \geq \epsilon_{yd}$$

## Determinazione di $\eta_{\min}$



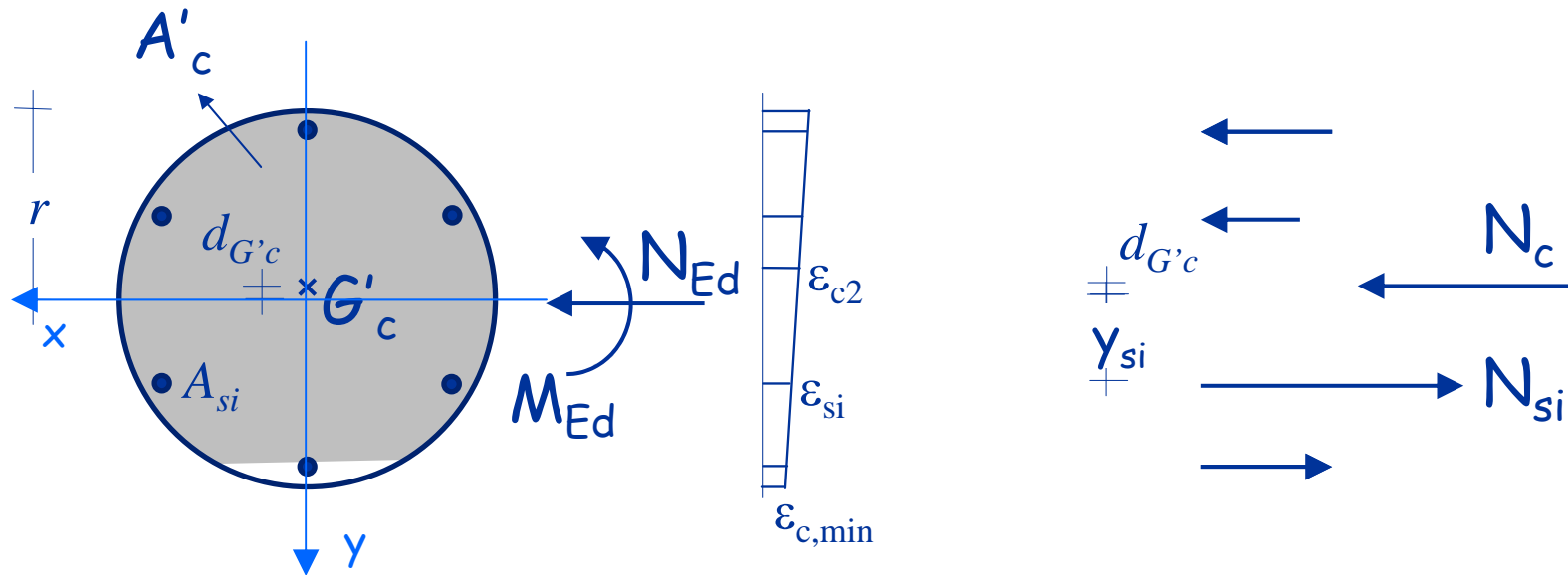
Per tentativi ricavo  $\eta_{\min} = 0.324$

$$N_c = -1702.9 \text{ kN}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}; \quad N_{s2} = -120.5 \text{ kN}; \quad N_{s3} = -87.8 \text{ kN}; \quad N_{s4} = -28.6 \text{ kN}$$

$$N_c + N_{s1} + N_{s1} + N_{s1} + N_{s4} = -2000 \text{ kN}$$

# Determinazione di $M_{Rd}$



$$N_c = -1702.9 \text{ kN}$$

$$y_{G'_c} = -0.85 \text{ cm}$$

$$N_{s1} = -60.2 \text{ kN}$$

$$y_{s1} = -16 \text{ cm}$$

$$N_{s2} = -120.5 \text{ kN}$$

$$y_{s2} = -8 \text{ cm}$$

$$N_{s3} = -87.8 \text{ kN}$$

$$y_{s3} = 8 \text{ cm}$$

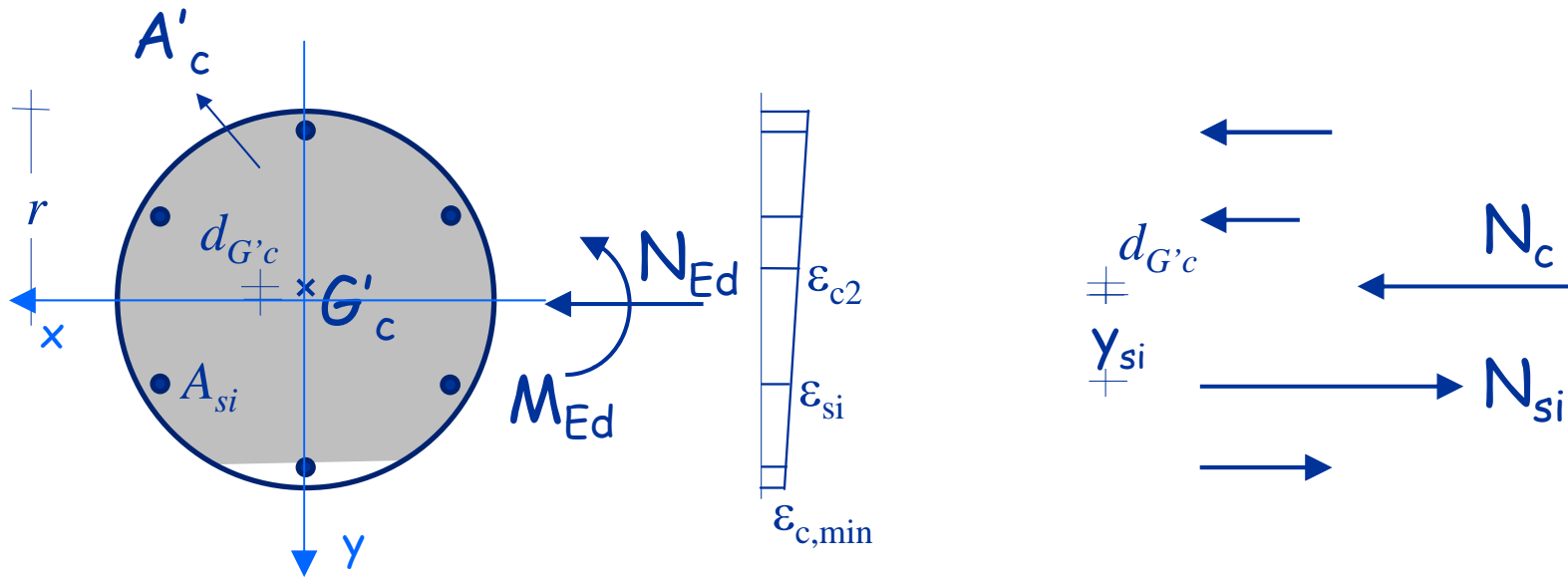
$$N_{s4} = -28.6 \text{ kN}$$

$$y_{s4} = 16 \text{ cm}$$

$$M_{Rd} = 22.2 \text{ kNm}$$



# Verifica



$$M_{Ed} = 45 \text{ kNm} > M_{Rd} = 22.2 \text{ kNm}$$

La sezione NON è verificata